

### Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

**Delens, Paul:** Sur les opérations formelles du calcul logique. C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 686—689 (1932).

**Delens, Paul:** Représentations géométriques de familles d'ensembles. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **1**, 213—215 (1932).

In der ersten Note werden die Operationen Disjunktion, Konjunktion, Inklusion und Komplement durch die arithmetischen Operationen (bei Voraussetzung der Beziehung  $E^2 = E$ ) interpretiert; die zweite Note bringt eine Anwendung dieser Interpretation auf Vektorräume.

*Arnold Schmidt* (Göttingen).

**Leśniewski, Stanisław:** Über Definitionen in der sogenannten Theorie der Deduktion. C. R. Soc. Sci. Varsovie **24**, 289—309 (1932).

Łukasiewicz gab für den Aussagenkalkül das Axiom

$$CCCaCbaCCCNcCdNeCCcCdfCCedCefgChg$$

an. Für die auf diesem Axiom in klammer- und punktloser Symbolik aufbauende Deduktionstheorie definiert Leśniewski im Sinne des semasiologisch orientierten Formalismus die drei Deduktionsregeln: Schluß, Substitution und explizite Definition. Der Prototyp der letzteren hat die Gestalt  $NCCFaNCaFa$ .

*Arnold Schmidt*.

**Nelson, Everett J.:** Deductive systems and the absoluteness of logic. Mind **42**, 30—42 (1933).

C. I. Lewis gab in „Mind and the World Order“ gelegentlich eines Angriffs auf die Absolutheit der Logik einige Beispiele für „Pseudologiken“ an; Nelson legt dar, daß es sich um Teilsysteme der gewöhnlichen Aussagenlogik mit geänderter Interpretation handelt. (Man vgl. auch den Anfang des Referats betr. Lewis, dies. Zbl. **5**, 337.) Der anschließende Versuch Nelsons, „alternative“ Axiomensysteme sowohl in der Logik als in der Mathematik — besonders das Beispiel der nichteuklidischen Geometrie wird behandelt — als unmöglich zu erweisen, läuft allerdings auf eine Auffassung des Begriffs „alternative“ heraus, bei der die Behauptung zur Tautologie wird.

*Arnold Schmidt*.

**Bernstein, B. A.:** On Nicod's reduction in the number of primitives of logic. Proc. Cambridge Philos. Soc. **28**, 427—432 (1932).

In Proc. Cambridge Philos. Soc. **19** (1917) gab Nicod ein Axiom und eine Schlußregel an, in denen nur die Sheffersche Operation  $|$  vorkommt und aus denen bei geeigneter Interpretation der Zeichen  $\vee, \infty$  die Whitehead-Russellschen primitive propositions sich ergeben. Bernstein bringt nun Beweise für die gegenseitige Unabhängigkeit und Konsistenz des Axioms und der Schlußregel von Nicod; er leitet diese Nicod-schen Regeln, die — bei Interpretation von  $p | q$  durch  $\infty p \vee \infty q$  — als identisch wahre Formeln bekannt sind, ausführlich aus den primitive propositions her und gibt einen ausführlichen Beweis für die bereits in der 2. Auflage der Principia angeführte Möglichkeit, das Zeichen  $\Phi x$  aus der Liste der primitive ideas zu streichen. Da die Whitehead-Russellsche Theorie der klassischen Aussagenlogik nicht adäquat sei, gelte dies auch für die Nicod'sche Theorie. Die Abwegigkeit einer derartigen Spekulation wurde bereits in dies. Zbl. **5**, 146 erwähnt.

*Arnold Schmidt* (Göttingen).

● **Bentley, Arthur F.:** Linguistic analysis of mathematics. Bloomington: Principia press, Inc. 1932. XII, 315 S.

Die Absicht des Verf. geht dahin, eine linguistische Analyse der Mathematik, insbesondere der Grundlagenforschung durchzuführen, um ihren widerspruchsfreien Zusammenhang (consistency) zu sichern. Unter Ablehnung aller bloß intuitiven Bestandteile in Symbolik und Wortsprache, der sog. „Realistic Postulation“, sucht er zu



einer rein „semantischen“ Axiomatik („Semantic Postulation“) vorzudringen, d. h. einer solchen, die alle ihre Begriffe durch formale Charakteristik innerhalb des Systems selbst bestimmt („orderings of the form  $x$ -to- $x$ “ im Gegensatz zu solchen von d. F.  $x$ -to- $X$ , wo  $x$  ein innerhalb und  $X$  ein außerhalb des Systems gelegenes Objekt bedeutet). Arithmetik, Algebra, Geometrie und Analysis (schließlich auch die Mengenlehre) sollen durch eine solche Sprachkritik, für die der Verf. sich gelegentlich auf Fritz Mauthner beruft, zu einer umfassenden konsistenten Konstruktion zusammengefaßt werden. Des weiteren spielt die Unterscheidung von mathematischer Operation und math. Ding („ $M - O$ “ und „ $M - T$ “) eine große Rolle, die „operative“ Deutung der math. Begriffe führt zu der rein semantischen Auffassung der Grundlegungsprobleme. — Neu an der Methode des Verf. ist das Bestreben, nicht bloß die formalisierten Teile des mathematischen Sprachbestandes einer Bedeutungsanalyse zu unterwerfen, sondern auch die unformalen (gemeinsprachlichen) Erläuterungen in der Grundlagenforschung, z. B. in Hilberts Metamathematik, bei Weyl und Brouwer — der letzte wird dabei scharf und ungerecht kritisiert. — Das Werk beschäftigt sich im einzelnen mit Kronecker, Poincaré, Brouwer, Weyl, Hilbert und der ganzen modernen Grundlagenforschung, die weitgehend zitiert wird. Hervorzuheben ist eine ziemlich eingehende Behandlung der Frage der Nichtabzählbarkeit des Kontinuums und der darauf bezüglichen Beweismethoden. — Am Schluß folgt ein Abschnitt allgemeinerer Natur über Erkenntnis und Logik. Es werden im ganzen Buch von dem von der Soziologie herkommenden Verf. Beziehungen zu soziologischen und psychologischen und auch physikalischen Problemen (Ergologie, Behaviorism, Quantentheorie) aufgezeigt; die ganze Untersuchung ist niemals mathematisch, sondern hat die Mathematik nur zu ihrem Gegenstand.

Oskar Becker (Bonn).

Carnap, Rudolf: Psychologie in physikalischer Sprache. Erkenntnis 3, 107—142 (1932).

Zilsel, Edgar: Bemerkungen zur Wissenschaftslogik. Erkenntnis 3, 143—161 (1932).

Duncker, Karl: Behaviorismus und Gestaltpsychologie. (Kritische Bemerkungen zu Carnaps „Psychologie in physikalischer Sprache“.) Erkenntnis 3, 162—176 (1932).

Carnap, Rudolf: Erwiderung auf die vorstehenden Aufsätze von E. Zilsel und K. Duncker. Erkenntnis 3, 177—188 (1932).

Grelling, Kurt: Bemerkungen zu Dubislavs „Die Definition“. Erkenntnis 3, 189 bis 200 (1932).

Dubislav, Walter: Bemerkungen zur Definitionslehre. Erkenntnis 3, 201—203 (1932).

Neurath, Otto: Protokollsätze. Erkenntnis 3, 204—214 (1932).

Carnap, Rudolf: Über Protokollsätze. Erkenntnis 3, 215—228 (1932).

Planck, Max: Die Kausalität im Naturgeschehen. Scientia 53, 153—164 (1933).

## Algebra und Zahlentheorie.

Kraitchik, M.: Sur les permutations. (55. sess., Nancy, 20. VII. 1931.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 46—47 (1931).

Tedeschi, Bruno: Calcolo della funzione generatrice di alcune somme di valori  $\binom{n}{k}$ . Boll. Un. Mat. Ital. 12, 22—25 (1933).

Salvemini, T.: Una formula relativa al calcolo combinatorio. Boll. Un. Mat. Ital. 12, 25—27 (1933).

Jagannathan, P.: On  $(2n - 2)!/n!(n + r)!$ . J. Indian Math. Soc. 19, 253 bis 256 (1932).

Let  $F(n + r) = \frac{(2n - 2)!}{n! \cdot (n + r)!}$ . Balakram has proved that  $F(n)$  is an integer for an infinity of values of  $n$ . The object of this note is to show that when  $r$  is any fixed positive integer,  $F(n + r)$  is also an integer for infinitely many values of  $n$ .

Auszug.



**Maltezos, K.: Über eine merkwürdige Determinante.** Bull. Soc. Math. Grèce 13, Nr 2, 24—26 (1932) [Griechisch].

Es handelt sich um die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \nu & \nu^2 & \dots & \nu^m \\ 1 & \nu + \mu_1 & (\nu + \mu_1)^2 & \dots & (\nu + \mu_1)^m \\ 1 & \nu + \mu_2 & (\nu + \mu_2)^2 & \dots & (\nu + \mu_2)^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \nu + \mu_m & (\nu + \mu_m)^2 & \dots & (\nu + \mu_m)^m \end{vmatrix},$$

deren Wert sich unabhängig von den Parametern  $\nu, \mu_1, \dots, \mu_m$ , nämlich gleich  $1! 2! 3! \dots m!$ , erweist. *Bessel-Hagen* (Bonn).

**Wegner, Udo: The product of a circulant matrix and a special diagonal matrix.** Amer. Math. Monthly 40, 23—25 (1933).

**Garver, Raymond: A reading list in the elementary theory of equations.** Amer. Math. Monthly 40, 77—84 (1933).

**Westerfield, E. C.: A new bound for the zeros of polynomials.** Amer. Math. Monthly 40, 18—23 (1933).

Die Zahl  $q_1 + (y_2 - 1)q_2 + (y_3 - y_2)q_3 + \dots + (y_n - y_{n-1})q_n$  ist eine obere Schranke für die absoluten Beträge der Nullstellen des Polynoms

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

wenn  $y_k$  die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$y^k = y^{k-1} + y^{k-2} + \dots + y + 1$$

und  $q_1, q_2, \dots, q_n$  die nach abnehmender Größe geordnete Folge der Zahlen  $|a_1|, |a_{\frac{1}{2}}|, \dots, |a_{\frac{1}{n}}|$  bedeuten. *v. Sz. Nagy* (Szeged).

**Bronowski, J.: The sum of powers as canonical expression.** Proc. Cambridge Philos. Soc. 29, 69—82 (1933).

Die Koeffizienten der Linearformen  $y_i = a_{i0}z_0 + \dots + a_{ir}z_r$  ( $i = 1, \dots, h$ ) seien Unbestimmte, die Koeffizienten der Formen  $Y_s = A_{s0}z_0 + \dots + A_{sr}z_r$  ( $s = 1, \dots, H$ ) Konstanten. Unter welchen Voraussetzungen kann man die  $h(r+1)$  Größen  $a_{ik}$  und die  $H$  Größen  $\lambda_s$  so bestimmen, daß die allgemeine Form  $F$   $n$ -ter Ordnung in den Variablen  $z_0, \dots, z_r$  sich in der Gestalt:

$$F = \sum_{i=1}^h y_i^2 + \sum_{s=1}^H \lambda_s Y_s^2$$

schreiben läßt? Dabei wird vorausgesetzt, daß die Zahl  $h(r+1) + H$  der verfügbaren Konstanten mit der Zahl  $\binom{n+r}{r}$  der in  $F$  auftretenden Konstanten übereinstimmt (Spezialfall:  $H = 0$ ). Die Aufgabe wird geometrisch interpretiert und mit den Hilfsmitteln der algebraischen Geometrie beantwortet. *E. A. Weiss* (Bonn).

**McCoy, Neal H.: On the resultant of a system of forms homogeneous in each of several sets of variables.** Trans. Amer. Math. Soc. 35, 215—233 (1933).

Die Mertenssche Resultantentheorie wird auf Systeme von  $m = \sum \alpha_j + 1$  mehrfach-homogenen Formen  $F_i$  in  $r$  Variablenreihen übertragen, wo  $\alpha_j + 1$  die Anzahl der Variablen in einer Reihe ist. Der Hauptsatz lautet: Es gibt ein und nur ein irreduzibles Polynom  $R(a)$  der unbestimmten Koeffizienten  $a$  der allgemeinen Formen  $F_i$ , welches, wenn aus jeder der  $r$  Variablenreihen eine Variable gleich Eins gesetzt wird, die Eigenschaft

$$R(a) \equiv 0 \pmod{F_1, F_2, \dots, F_m}$$

besitzt. Dieses Polynom heißt die Resultante. Der Grad von  $R(a)$  in den Koeffizienten einer Form  $F_i$  ist gleich dem Koeffizienten von  $t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_m^{\alpha_m}$  im Produkt  $\prod_{\lambda \neq i} L_\lambda$ , wo  $L_\lambda$

die aus den Gradzahlen  $n_{\lambda\mu}$  der Form  $F_\lambda$  gebildete Linearform  $n_{\lambda 1}t + \dots + n_{\lambda r}t_r$  ist. Im 2. Teil der Arbeit werden für verschiedene Spezialfälle, darunter der Fall der



Multilinearformen und der der vielfach-binären Formen gleicher Gradzahlen, explizite Determinantenausdrücke für die Resultante aufgestellt. *van der Waerden.*

**Griffiths, L. W.: Representation by extended polygonal numbers and by generalized polygonal numbers.** Amer. J. Math. 55, 102—110 (1933).

$m$  sei eine feste natürliche Zahl. Verf. versteht unter Polygonalzahlen, ausgedehnten (extended) und verallgemeinerten (generalized) Polygonalzahlen der Ordnung  $m+2$  die drei Zahlenreihen

- (1)  $p(x) = x + m(x^2 - x)/2$  für  $x = 0, 1, 2, \dots$
- (2)  $e(x) = -x + m(x^2 + x)/2$  für  $x = -1, 0, 1, \dots$
- (3)  $g(x) = x + m(x^2 - x)/2$  für  $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Dann betrachtet er Formen

$$f = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n \quad \text{bzw.} \quad a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots + a_n g_n,$$

in denen die Koeffizienten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  feste natürliche Zahlen sein sollen, während  $e_1, e_2, \dots, e_n$  bzw.  $g_1, g_2, \dots, g_n$  je alle Zahlen der Reihen (2) bzw. (3) durchlaufen sollen. Eine solche Form heißt universal, wenn durch sie jede natürliche Zahl dargestellt werden kann. Das Problem des Verf. ist, alle universalen Formen aufzustellen. In der vorliegenden Arbeit, die frühere Untersuchungen von Dickson und vom Verf. selbst fortführt, beschränkt sich der Verf. auf die Formen mit  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq m+2$ . Für diese stellt er bei der Reihe (2) für jedes  $m$  eine endliche Anzahl von Formen auf, unter denen alle universalen Formen enthalten sein müssen, und zeigt, daß jede der aufgestellten Formen wenigstens alle natürlichen Zahlen mit endlich vielen Ausnahmen darzustellen fähig ist, wobei die evtl. Ausnahmehahlen zwischen explizit angegebenen von  $m$  abhängenden Schranken liegen müssen. Verf. ist auf Grund von Versuchen der Überzeugung, daß in Wahrheit keine Ausnahmehahlen existieren. — Bei der Reihe (3) hat Verf. nicht ganz so weit reichende Resultate erhalten.

*Bessel-Hagen (Bonn).*

**Auerbach, Herman: Sur les groupes bornés de substitutions linéaires.** C. R. Acad. Sci., Paris 195, 1367—1369 (1932).

Es wird bewiesen: Wenn  $G$  eine Gruppe homogener linearer Substitutionen vom Grade  $n$ , mit komplexen (reellen) beschränkten Koeffizienten ist, so gibt es eine positiv-definite Hermitesche (quadratische) Form, welche durch die Substitutionen von  $G$  in sich übergeht. Unter den Invarianten der Gruppe  $G$  gibt es endlich viele, durch die sich alle anderen ganz rational ausdrücken lassen. Dies bildet eine weitgehende Verallgemeinerung der in dieser Richtung bisher bekannten Sätze [vgl. H. Weyl, Math. Z. 23, 289 (1925); 24, 392 (1926); R. Weitzenböck, dies. Zbl. 4, 243]. Als Anwendung folgt:  $S$  sei eine beschränkte, im euklidischen Raume  $R_n$  gelegene Menge von dieser Eigenschaft, daß es zu je zwei Punkten  $p, q$  von  $S$  eine affine Abbildung des Raumes  $R_n$  auf sich selbst gibt, bei welcher  $S$  in sich selbst und  $p$  in  $q$  übergeht; dann liegt die Menge  $S$  auf der Oberfläche eines Ellipsoids.

*S. Mazur (Lwów).*

**Kulakoff, A., und Sergei Tschunichin: Über die Untergruppen von zusammengesetzter Ordnung einer endlichen Gruppe.** Rec. math. Soc. math. Moscou 39, Nr 3, 67—69 u. dtsch. Zusammenfassung 69—70 (1932) [Russisch].

Gehen in der Ordnung  $g$  einer Gruppe  $\mathfrak{G}$  verschiedene Primzahlen auf, und ist  $\mathfrak{G}$  weder von der Ordnung  $pq$  noch von der Ordnung  $pq^\beta$  mit  $q^\beta \equiv 1 \pmod{p}$ , wobei  $\beta$  die kleinste Lösung  $>0$  dieser Kongruenz ist und  $\mathfrak{G}$  nur eine (invariante) Sylowgruppe der Ordnung  $q^\beta$ , die abelsch und vom Typ  $(q, q, \dots, q)$  ist, enthält, so enthält  $\mathfrak{G}$  eine echte Untergruppe  $\mathfrak{H}$ , in deren Ordnung  $h$  zwei verschiedene Primzahlen aufgehen. Für  $g = p^\lambda n$ ,  $(p, n) = 1$ ,  $\lambda \geq 2$  kann man dann sogar  $\mathfrak{H}$  so wählen, daß  $h$  durch  $p$  teilbar ist. Verff. stützen sich auf Methoden von Frobenius und O. I. Schmidt.

*Magnus (Frankfurt a. M.).*



**Luther, C. F.:** Concerning primitive groups of class *U*. Amer. J. Math. 55, 77 bis 101 (1933).

In einer Gruppe  $\mathfrak{G}$  aus Permutationen von  $n$  Buchstaben heißt der Minimalgrad  $u$  der von der identischen verschiedenen Permutationen (d. h. die Zahl der von derselben wirklich permutierten Buchstaben) die Klasse der Gruppe. Für mehrfach transitive Gruppen mit  $u > 3$  (d. h. die Gruppe enthält nicht die alternierende ihres Grades) ist dann  $u > f(n)$ , wobei  $n/f(n)$  eine mit  $n \rightarrow \infty$  beschränkte Funktion von  $n$  ist. Verf. behandelt unter Benutzung der diesbezüglichen Arbeiten von Bochert [Math. Ann. 29, 33, 40 und 49 (1897)] und Manning [Trans. Amer. Math. Soc. 18, 31 (1928)] erstens den Fall, daß in  $\mathfrak{G}$  eine Permutation vom Grade  $u + \varepsilon$  und der Ordnung 2 auftritt; für 2- bzw. 3-fach transitive Gruppen und  $\varepsilon < u/5$  bzw.  $< u/6$  ergibt sich dann

$$u > n/2 - \sqrt{n}/2 - 5\varepsilon \quad \text{bzw.} \quad u \geq n/2 - 4\varepsilon.$$

Für beliebigen Transitivitätsgrad  $\sigma$  und geeignet eingeschränktes  $\varepsilon$  gelten ähnliche Formeln, die explizit unter Zugrundelegung einer Zerlegung von  $\sigma$  in  $r$  ( $r > 1$ ) ungerade Primzahlen angegeben werden. Ist zweitens in  $\mathfrak{G}$  eine Permutation  $s$  des Grades  $u + \varepsilon$  und der Ordnung  $p$  ( $p$ : ungerade Primzahl) enthalten, so ist für  $\sigma = 2$ ,  $\varepsilon \leq n/45$

$$u > \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{p}\right) - \frac{\sqrt{n}}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{p^2}}, \quad \text{und falls } \sigma = 3, \text{ die Ordnung von } s \text{ gleich } p^e \text{ und } \varepsilon < n/30 \text{ ist, } u > \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{p^e}\right) - 4\varepsilon.$$

Magnus (Frankfurt a. M.).

**Fouarge, L.:** Sur les relations existant entre certains ensembles continus finis de transformations et un groupe  $\infty^r$ . Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. 17, H. 3, 1–12 (1932).

In der vorliegenden Arbeit handelt es sich im wesentlichen um den Beweis des folgenden Satzes: Es seien

$$z'_\nu = I_\nu(z_1, \dots, z_n; a_1, \dots, a_r); \quad y'_\nu = K_\nu(y_1, \dots, y_n; b_1, \dots, b_r) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

zwei kontinuierliche (wesentlich)  $r$ -gliedrige Transformationsscharen. Die Produkttransformationsschar  $z''_\nu = K_\nu[I_1(z, a), \dots, I_n(z, a); b_1, \dots, b_r]$  ist dann und nur dann wesentlich  $r$ -gliedrig, wenn es eine kontinuierliche  $r$ -gliedrige, die identische Transformation enthaltende Gruppe  $z'_\nu = g_\nu(z_1, \dots, z_r; a_1, \dots, a_r)$  und Funktionen  $\gamma_\nu(z_1, \dots, z_n)$ ,  $\Phi_\nu(y_1, \dots, y_n)$  gibt, derart, daß identisch

$$I_\nu = g_\nu[\gamma_1(z), \dots, \gamma_n(z); a_1, \dots, a_r]; \quad K_\nu = \Phi_\nu[g_1(y, b), \dots, g_n(y, b)]$$

gilt. — Dabei werden über die in Betracht kommenden Funktionen gewisse in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen übliche, die Holomorphie betreffende Voraussetzungen gemacht.

O. Borůvka (Brno).

**Haar, Alfred:** Der Maßbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen. Ann. of Math., II. s. 34, 147–169 (1933).

Von den behandelten Gruppen wird vorausgesetzt, daß ihre Gruppenmannigfaltigkeit metrisch, separabel, im Kleinen kompakt und in sich dicht ist. In dieser Gruppenmannigfaltigkeit  $\mathfrak{G}$  wird ein Inhalts- und ein Maßbegriff eingeführt, in Analogie zur Peano-Jordanschen Inhalts- bzw. zur Lebesgueschen Maßtheorie. Dabei wird naturgemäß Invarianz gegenüber allen Gruppentransformationen gefordert: zwei „kongruente“ Punktmengen in  $\mathfrak{G}$  (d. h. zwei Mengen, die durch eine Abbildung  $X \rightarrow XA$  ineinander übergehen, wobei  $A$  ein beliebiges Gruppenelement ist) sollen denselben Inhalt bzw. dasselbe Maß haben. Das eigentliche Problem besteht darin, für die Mengen eines speziellen Mengenbereiches, der etwa den euklidischen Intervallen entspricht, Inhalte zu definieren; von einem solchen, hinreichend umfassenden, bewerteten Mengenbereich ausgehend, kann man die Inhalts- und Maßtheorie in bekannter Weise aufbauen. Einen solchen Ausgangsmengenbereich erhält man nun, indem man eine beliebige, in  $\mathfrak{G}$  dichte abzählbare Teilmenge betrachtet; der gesuchte Bereich  $\mathfrak{S}$  besteht dann aus allen Vereinigungsmengen von je



endlich vielen Kugeln mit rationalem Durchmesser um die Punkte dieser separierenden Menge.  $\mathfrak{S}$  enthält also nur abzählbar viele Mengen. Zu einer Inhaltsdefinition für diese gelangt Verf. folgendermaßen. Es seien  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{B}$  offene Teilmengen von  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{B}$  ihre abgeschlossenen Hüllen. Nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz kann man  $\mathfrak{B}$  sicher durch endlich viele zu  $\mathfrak{U}$  kongruente Mengen überdecken;  $h(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$  sei die kleinste Anzahl mit der das möglich ist. Nun wird eine offene kompakte Menge  $\mathfrak{G}$  willkürlich aber fest gewählt als „Einheitsmenge“.  $\mathfrak{R}_n$  bezeichne die offene Kugel mit dem Durchmesser  $1/n$  um einen ebenfalls fest gewählten Punkt. Dann wird gezeigt, daß die Zahlenfolge  $l_n(\mathfrak{B}) = h(\mathfrak{B}, \mathfrak{R}_n) : h(\mathfrak{G}, \mathfrak{R}_n)$  eine positive untere Grenze besitzt. Man kann daher nach bekannten Auswahlverfahren eine Teilfolge  $\mathfrak{R}_{n_v}$  derart herausgreifen, daß die entsprechende Zahlenfolge  $l_{n_v}(\mathfrak{B})$  für alle (abzählbar vielen) Mengen  $\mathfrak{B}$  des Bereiches  $\mathfrak{S}$  konvergiert. Ihr Grenzwert wird als Inhalt der Menge  $\mathfrak{B}$  bezeichnet. — Nachdem so die Maßtheorie begründet wurde, kann man nach dem üblichen Schema auch einen invarianten Integrationsprozeß einführen. Als unmittelbare Anwendung ergibt sich ohne Schwierigkeiten die Übertragung einiger Sätze von Peter und Weyl über die Darstellung Liescher Gruppen (Math. Ann. 97, 737—755).

Willy Feller (Kiel).

● **Dantzig, D. van: Studien über topologische Algebra.** Amsterdam: H. J. Paris 1931. 27 S. [Holländisch.]

Diese Groninger Dissertation enthält eine programmatische Übersicht über eine Reihe von Arbeiten, die in den Math. Ann. erscheinen sollen und sich mit solchen topologischen Räumen befassen, welche zugleich Gruppen, Ringe oder Körper sind. Die im 1. Kapitel dargestellte Komplettierungstheorie ist inzwischen in Math. Ann. 107 erschienen. Im 2. Kapitel werden die  $\mathfrak{h}_v$ -adischen Ringe (Verallgemeinerung der Henselschen  $\mathfrak{p}$ -adischen Zahlen) und ihre additive und multiplikative Zerlegung studiert. Das 3. Kapitel enthält eine Reihe von neuen Sätzen über topologische Gruppen. Im 4. Kapitel werden die im kleinen kompakten topologischen Körper vollständig aufgestellt. Man findet außer dem Körper der reellen und dem der komplexen Zahlen nur noch die Henselschen  $\mathfrak{p}$ -adischen Körper und die dazu analogen Potenzreihenkörper über einem Galois-Feld. Einen Teil davon hat inzwischen L. Pontrjagin (Ann. of Math. 33; vgl. Zbl. 3, 78) einfacher bewiesen (vgl. dies. Zbl. 6, 7).

van der Waerden (Leipzig).

**Klemenz, Karl: Untersuchungen über archimedische Körper in Räumen von mehr Dimensionen.** Anz. Akad. Wiss., Wien Nr 1, 3—4 (1933).

**Carlitz, Leonard: On Abelian fields.** Trans. Amer. Math. Soc. 35, 122—136 (1933).

Ein Unterkörper des Körpers  $\mathcal{Q}_m$  der  $m$ -ten Einheitswurzeln wird nach Weber primär genannt, wenn er nicht schon in einem  $\mathcal{Q}_{m'}$  mit  $m' < m$  enthalten ist. Zu jedem primären Körper  $k$  gibt es einen bestimmten kleinsten ihn enthaltenden „Ausgangs-Kreiskörper“  $K$  (Gut, Comment. math. helv. 1), der seinerseits Unterkörper von  $\mathcal{Q}_m$  und für ungerades  $m = q_1^{f_1} \dots q_n^{f_n}$  aus  $n$  solchen Unterkörpern von  $\mathcal{Q}_{q_1^{f_1}}, \dots, \mathcal{Q}_{q_n^{f_n}}$  zusammengesetzt ist, deren Grad durch  $q_1^{f_1-1}, \dots$ , bzw.  $q_n^{f_n-1}$  teilbar ist. Umgekehrt gibt es zu jedem Ausgangs-Kreiskörper  $K$  eine Menge von primären Körpern  $k_i$ , für welche  $K$  der kleinste sie enthaltende Ausgangs-Kreiskörper ist.  $K$  ist über jedem  $k_i$  unverzweigt, also Unterkörper des absoluten Klassenkörpers von  $k_i$ . Näher diskutiert wird der Fall, daß  $K$  vom Grad  $q^n$  ( $q$  Primzahl) und vom Typus  $(1, \dots, 1)$  ist und  $q$  in  $m$  ( $m$  ungerade) aufgeht. Mit Hilfe der bei Gut explizit entwickelten Formel für die Diskriminante von  $K$  wird vor allem gezeigt, daß jeder absolut-abelsche Körper, welcher über einem der  $k_i$  unverzweigt ist, ebenfalls Unterkörper von  $K$  sein muß. Überdies werden Relationen für die Anzahlen der  $k_i$  vom Grad  $q^s$  ( $s < n$ ) hergeleitet. — Verf. entwickelt außerdem verschiedene Kriterien für außerwesentliche Diskriminantenteiler bei Kreiskörpern, indem er einen allgemein gültigen Satz von Hensel auf diesen Fall anwendet.

Taussky (Wien).



**Williams, W. L. G.:** A summation theorem in the theory of numbers. Trans. Roy. Soc. Canada, III. s. 26, 35—37 (1932).

Die homogenen Koordinaten  $(x_1, \dots, x_m)$  des  $(m-1)$ -dimensionalen projektiven Raums  $G_{m,p^n}$  über dem Galoisfeld  $GF(p^n)$  werden so normiert, daß die letzte nicht verschwindende Koordinate 1 ist. Dann gilt das in der Invariantentheorie über  $GF(p^n)$  verwendbare „Theorem: If  $i_1, i_2, \dots, i_m$  are any set of non-negative integers, not all zero, whose sum is divisible by  $p^n-1$  and  $L = \sum_{G_{m,p^n}} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_m^{i_m}$ , then  $L=0$  in the field, unless every  $i$  is a positive multiple of  $p^n-1$ , in which case  $L = (-1)^{m+1}$  in the field“.

Zorn (Hamburg).

● **Hancock, Harris:** Foundations of the theory of algebraic numbers. Vol. 2. The general theory. New York: Macmillan Comp. 1932. XXVI, 654 S. \$ 8.—

Der einleitende 1. Band wurde im Zbl. 3, 197, referiert. Der vorliegende 2. Band bringt für beliebige Zahlkörper die Hauptsätze der Idealtheorie, und zwar zunächst auf der Grundlage der Dedekindschen Modultheorie. Es folgt die Kroneckersche Formentheorie, die Hurwitzsche Neubegründung der Hauptsätze, die Theorie der regulären und irregulären Diskriminantenteiler, die Theorie der Einheiten nach Dirichlet und nach Minkowski, ein Ausschnitt aus Minkowskis Geometrie der Zahlen, die Endlichkeit der Klassenzahl, die Lehre der zum Führer teilerfremden Ideale einer Ordnung, einiges über Relativkörper, die Galoissche Theorie, schließlich die Hilbertsche Theorie der Galoisschen Körper und ein Ausblick auf die  $p$ -adische Methode.

van der Waerden (Leipzig).

**Poulet:** Une généralisation des suites  $u_n, v_n$  de Lucas et son application à la théorie des équations. (55. sess., Nancy, 20. VII. 1931.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 56—57 (1931).

● **Gérardin, André:** Factorisations quadratiques et primalité. I. Nancy: Sphinx-Céipe (A. Gérardin) 1932. 104 S.

This volume is concerned with the factorization of  $hy^2 + kz^2$  (chiefly  $y^2 + z^2$ ). Without availing himself of the theory of binary quadratic forms, the author discusses methods of factoring  $f(x) = ax^2 + bx + c$  from the solutions of the congruence  $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ . More than 2000 values of  $x$  are given for which  $f(x)$  is a large prime, D. H. Lehmer (Altadena, California).

**Zeitz, H.:** Neue Beweise einer elementaren Abschätzung der  $n$ -ten Primzahl. S.-B. Berlin. math. Ges. 31, 4—8 (1932).

Let  $p_n$  designate the  $n$ -th prime number and let  $P_n$  be the product of the first  $n$  primes. This note gives the proofs of the following two theorems. — If  $n \geq 4$  then  $p_{n+1} < \sqrt{P_n}$ . — If  $r$  is any number  $\geq 1$  and if  $n \geq r2^r + r$  then  $p_{n+1} < \sqrt[r]{P_n}$ . — These theorems are made to follow in a quite elementary way without making use of the theorem of Tschebyschef relative to the distribution of primes. Lehmer.

● **Bruns, H. W.:** Über den Ursprung der Tatsache, die dem großen Fermatschen Theorem zugrunde liegt. Basel: B. Wepf & Cie. 1933. 15 S. Frcs. 2.—

**Morishima, Taro:** Über die Fermatsche Vermutung. IX. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 14, 451—464 (1932).

This article establishes a number of theorems which extend the celebrated criteria of Kummer for the existence of a solution of

$$x^l + y^l + z^l = 0$$

in which the odd prime  $l$  does not divide  $xyz$ . Unlike those of Kummer, however, these criteria cannot be expressed without using explicitly the theory of ideals in the cyclotomic field  $K(\exp 2\pi i/l)$ , and are too complicated to give here with a complete explanation of the notation involved. For the benefit of the reader who has an intimate knowledge of the subject it may be said that the criteria involve the divisibility by  $l$  of the familiar logarithmic derivative expressions formed for certain principal ideals



of the cyclotomic field.— The reviewer takes this opportunity to correct an error in the review of the author's preceding paper VIII (this Zbl. 4, 292) where the factor  $b_2; f_2(t)$  has been omitted on the left side of the congruence on line 11 of the review.

*D. H. Lehmer* (Altadena, Cal.).

**Carlitz, L.:** On a problem in additive arithmetic. II. Quart. J. Math., Oxford Ser. 3, 273–290 (1932).

Diese Arbeit schließt an eine frühere Abhandlung des Verf. an (dies. Zbl. 2, 14), deren Resultate in der vorliegenden Arbeit wesentlich verallgemeinert werden. Außerdem hat Verf. seine älteren funktionentheoretischen Beweise im Anschluß an eine Methode von Estermann durch elementare ersetzt. Es wird gezeigt: Sind  $r (\geq 2)$  distributive zahlentheoretische Funktionen  $\alpha_m(n)$ ,  $1 \leq m \leq r$ , mit

$$\alpha_m(p) = 1 + O(p^{-\frac{1}{2}+\epsilon}), \quad \alpha_m(n) = O(n^\epsilon)$$

und  $r$  ganze Zahlen  $h_1 \geq 0, \dots, h_r \geq 0$  gegeben, so werden für die von ganzem  $x > 0$  abhängigen Summen,  $k > 0$  fest,

$$\sum_{n_1+\dots+n_r=x} \prod_{m=1}^r n_m^{h_m} \alpha_m(n_m) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^x n^{h_1} \alpha_1(n) (n+k)^{h_2} \alpha_2(n+k)$$

Darstellungen als „Hauptglied“  $+ O(x^{h_1+\dots+h_r+r-\frac{1}{2}+\epsilon})$  bzw.  $+ O(x^{h_1+h_2+\frac{1}{2}+\epsilon})$  gegeben. Eine genaue Wiedergabe der Hauptglieder ist auf wenigen Zeilen unmöglich. Die Arbeit enthält mehrere interessante Anwendungen der genannten Abschätzungen.

*Hans Heilbronn* (Göttingen).

**Schnirelmann, L.:** Über additive Eigenschaften von Zahlen. Math. Ann. 107, 649–690 (1933).

Jede Folge  $F$  aus wachsenden natürlichen Zahlen  $n_1, n_2, \dots$  mit „positiver Dichtigkeit“, d. h. mit  $N(x)/x \geq \alpha > 0$ , wo  $N(x)$  die Anzahl der  $n_i \leq x$  bedeutet, oder auch nur mit „fast positiver Dichtigkeit“, d. h. mit  $\lim_{x \rightarrow \infty} (N(x)/x) > 0$ , erweist sich als

„Basis der natürlichen Zahlen“; d. h. die positiven Vielfachen  $x$  einer passenden natürlichen Zahl (also, wenn  $n_1 = 1$  ist, alle natürlichen Zahlen  $x$ ) sind Summen einer beschränkten Anzahl von Größen  $n_i$ . Nach Aufstellung einer hinreichenden Bedingung dafür, daß diese Summenglieder sogar oberhalb  $\lambda x$  mit festem  $\lambda > 0$  gewählt werden können, befaßt sich der Rest der Arbeit mit Bedingungen dafür, daß die Folge  $F$  eine „beständige Basis der natürlichen Zahlen“ darstellt, d. h. daß jede „dichte“ Teilfolge von  $F$  (z. B.  $F$  selbst) eine Basis der natürlichen Zahlen bildet. Eine Teilfolge heißt dabei dicht, wenn  $N_1(x)/N(x) \geq \alpha > 0$  ist, wo sich  $N_1(x)$  auf die Teilfolge,  $N(x)$  auf  $F$  bezieht. In den im folgenden genannten Sätzen wird von vornherein  $n_1 = 1$  angenommen. Für eine passende positive, monoton wachsende Funktion  $\varphi(i)$  sei  $n_i = O(i\varphi(i))$ . Es sei  $B(z)$  die Lösungszahl von  $n_i + n_j = z$ ,  $A(y, x)$  die von

$n_i - n_j = y$ ,  $n_i < x$ ,  $n_j < x$ . Dann erweist sich die Bedingung  $\sum_{z=1}^x B^2(z) = O(x^3/\varphi^4(x))$  und im Falle  $\varphi(i) = O(\sqrt{i})$  im Anschluß an Landau auch die Bedingung  $\sum_{y=1}^x A^2(y, x)$

$= O(x^3/\varphi^4(x))$  als hinreichend dafür, daß die Folge  $F$  eine beständige Basis der natürlichen Zahlen bildet und überdies schon die Folge aller  $n_i + n_j$  positive Dichtigkeit hat. Mit Hilfe dieser Ergebnisse zeigt sich insbesondere, daß die aus der Zahl 1 und den Primzahlen bestehende Folge und somit auch die aus der Zahl 1 und den Primzahlen einer beliebigen arithmetischen Progression bestehende Folge eine beständige Basis der natürlichen Zahlen bildet. Die Anzahl der Darstellungen einer Zahl  $i$  als Summe von  $u$  Größen

$n_v \leq x$  werde bei festem  $u > 0$  mit  $A_i(x)$  bezeichnet; es sei  $D(x) = \sum_{j=1}^x A_j^2(x)$ . Wenn dann (bei passendem  $u$ )  $D(x) = O(N^{2u}(x/u)/x)$  ist, so hat die Folge aller nicht leeren Summen von höchstens  $u$  Gliedern von  $F$  positive Dichtigkeit. Übrigens ist

$D(x) \leq \int_0^1 |f(x, y)|^{2u} dy$ , wo  $f(x, y) = \sum_{n_v \leq x} e^{2\pi i n_v y}$  gesetzt ist; daher genügt es für die



positive Dichtigkeit, wenn dieses Integral bei passendem  $u$  die obige Größenordnung hat. Zugleich aber erweist sich die Folge dann sogar als beständige Basis der natürlichen Zahlen. Mittels dieses Satzes ergibt sich, daß die Folge der Potenzen  $n^p$  ( $n=1, 2, \dots$ ) für eine beliebige natürliche Zahl  $p$  eine beständige Basis der natürlichen Zahlen darstellt. (Der Waring-Hilbertsche Satz handelt nur von einer Basis schlechthin.)

W. Weber (Göttingen).

**Koksma, J. F.: Approximationen reeller Zahlen mit Nebenbedingungen.** Nieuw Arch. Wiskde 17, 322—339 (1932).

Es wird folgender Satz bewiesen: „Sei  $\alpha$  eine beliebige feste reelle Zahl. Es sei eine unendliche Folge  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$  von Funktionen  $\varphi_r(x) \geq 1$  und eine ganzzahlige Funktion  $k = k(x) \geq 1$  gegeben, alle definiert und monoton nicht abnehmend für ganzes  $x > 0$ . Es gebe zwei von  $x$  unabhängige Zahlen  $x_0 > 3$  und  $v \leq 1$  mit  $\varphi_k(x) = \varphi_{k(x)}(x) \leq x^v$  für  $x > x_0$ . Es werde  $d = d(x) = k(x) - 1 + v$ ,  $\kappa = \kappa(x) = 2^k$ ,  $\Phi_r(x) = \varphi_r(x) \log \{3k\varphi_r(x)\}$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) gesetzt, und es gelte für jedes feste  $\gamma \geq 1$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \text{ ganz}}} (\gamma k)^{2k+1} \Phi_1(x) \Phi_2(x) \dots \Phi_k(x) \left( \frac{\{\Phi_k(x)\}^d}{x} \right)^{\frac{1}{d(\kappa-2) + \kappa/2}} = 0.$$

Dann hat das System der diophantischen Ungleichungen

$$-\frac{1}{\varphi_r(x)} < \alpha x^r < +\frac{1}{\varphi_r(x)} \pmod{1} \quad (r = 1, 2, \dots, k)$$

unendlichviele ganzzahlige Lösungen.“ Aus diesem Satz leitet der Verf. verschiedene Folgerungen ab; z. B. wird gezeigt, daß das Ungleichungssystem

$$-x^{-\frac{1}{204}} < \alpha x^r < +x^{-\frac{1}{204}} \pmod{1} \quad (r = 1, 2, 3, 4)$$

unendlichviele Lösungen besitzt. Das Bemerkenswerte an diesen Aussagen liegt darin, daß die Zahl  $\alpha$  ganz beliebig sein kann. — Der Beweis beruht auf Abschätzungen trigonometrischer Summen und einem Satz von van der Corput über die Verteilung von Gitterpunkten.

K. Mahler (Göttingen).

**Mahler, Kurt: Zur Approximation algebraischer Zahlen. I. (Über den größten Primteiler binärer Formen.)** Math. Ann. 107, 691—730 (1933).

Der Thue-Siegelsche Satz macht folgende Aussage über die Approximation einer reellen algebraischen Zahl vom Grade  $n$  durch rationale irreduzible Brüche  $\frac{p}{q}$ : Es gibt höchstens endlich viele solche Brüche, für die

$$\left| \zeta - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^\beta}$$

ist, wo  $\beta = \beta(\varepsilon) = \min_{1 \leq r \leq n-1} \left( \frac{n}{r+1} + r + \varepsilon \right)$ ,  $\varepsilon > 0$  beliebig. — Diese Approximation läßt sich auffassen als Approximation im Sinne einer archimedischen Bewertung des durch  $\zeta$  erzeugten algebraischen Zahlkörpers  $K$ , und zwar einer solchen, die einer reellen unendlichen Primstelle  $\mathfrak{P}$  von  $K$  zugeordnet ist. Neben solchen Approximationen stehen vom arithmetischen Standpunkt aus völlig gleichberechtigt die Approximationen nach den übrigen Bewertungen von  $K$ , also den nichtarchimedischen Bewertungen, die den endlichen Primstellen (Primidealen)  $\mathfrak{P}$  von  $K$  entsprechen, und auch noch den archimedischen Bewertungen, die den komplexen unendlichen Primstellen  $\mathfrak{P}$  von  $K$  entsprechen. Mahler studiert nun die gleichzeitige Approximation einer algebraischen Zahl  $\zeta$  vom Grade  $n$  im Sinne von endlich vielen Bewertungen ihres Körpers  $K$ , gegeben durch endlich viele Primstellen  $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_t$  von  $K$ , und zwar beschränkt er sich auf den Fall, daß eine dieser Primstellen,  $\mathfrak{P}_0$ , unendlich und reell (sozusagen vom Grade 1), die anderen  $\mathfrak{P}$  endlich und vom Grade 1 sind.  $\zeta$  ist dann also für  $\mathfrak{P}_0$  eine reelle algebraische Zahl (eine gewöhnliche reelle konjugierte zu  $\zeta$ ), für die übrigen  $\mathfrak{P}_\tau$  je eine  $P_\tau$ -adische Zahl, wo  $P_\tau = N(\mathfrak{P}_\tau)$  die zugehörige rationale Primzahl ist. Er beweist dann die folgende Verallgemeinerung des Thue-Siegelschen Satzes: Ist  $n \geq 3$ ,  $k \geq 1$



eine fest gegebene Zahl und  $\beta$  der oben erklärte Siegelsche Exponent, so gibt es höchstens endlich viele rationale irreduzible Brüche  $\frac{p}{q}$ , für die

$$\min\left(1, \left|\zeta - \frac{p}{q}\right|_{\mathfrak{P}_0}\right) \cdot \prod_{\tau=1}^t \min(1, |q\zeta - p|_{\mathfrak{P}_\tau}) \leq k \frac{1}{\max(|p|, |q|)^\beta}$$

ist. — Der Beweis stützt sich auf das grundlegende Produkttheorem:  $\prod_{\mathfrak{P}} |\alpha|_{\mathfrak{P}} = 1$ , wo  $\alpha \neq 0$  eine Zahl aus  $K$  ist,  $\mathfrak{P}$  alle Primstellen von  $K$  durchläuft und  $|\alpha|_{\mathfrak{P}}$  die (passend normierten) zugehörigen Bewertungen von  $\alpha$  bezeichnet. Aus diesem Produkttheorem fließt die Ungleichung:  $|N(\alpha)| \cdot \prod_{\tau=1}^t |\alpha|_{\mathfrak{P}_\tau} \geq 1$  für ganze  $\alpha \neq 0$ , die bei der

Mahlerschen Verallgemeinerung dieselbe Rolle spielt wie die Ungleichung  $|N(\alpha)| \geq 1$  für ganze  $\alpha \neq 0$  bei der Approximation im Sinne des gewöhnlichen absoluten Betrages allein. — Als Folgen aus dem angeführten Approximationssatz ergeben sich die Tatsachen: Für eine irreduzible ganzrationalzahlige Binärform  $F(x, y)$  vom Grad  $n \geq 3$  und endlich viele gegebene Primzahlen  $P_1, \dots, P_t$  gilt für das größte Potenzprodukt  $Q(p, q)$  der  $P_\tau$ , das in  $F(p, q)$  aufgeht: Die Ungleichung

$$\frac{|F(p, q)|}{Q(p, q)} \leq k \max(|p|, |q|)^{n-\beta}$$

hat höchstens endlich viele ganzrationale teilerfremde Lösungen  $p, q$ . — Insbesondere: Hat  $F(x, y)$  im Körper der komplexen Zahlen mindestens drei verschiedene Linearfaktoren, so wächst der größte Primteiler  $P$  von  $F(p, q)$  für ganzrationale teilerfremde  $p, q$  mit  $\max(|p|, |q|)$  über alle Grenzen; hier kann  $F(x, y)$  auch reduzibel sein.

H. Hasse (Marburg/Lahn).

## Analysis.

**Simonart, F.:** Sur certaines inégalités relatives aux moyennes d'une fonction. Ann. Soc. Sci. Bruxelles A 52, 275—279 (1932).

Induktionsbeweis für die Ungleichung zwischen arithmetischem Mittel  $A_n$  und geometrischem Mittel  $G_n$  von  $n$  positiven Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , und zwar durch Bestimmung des Minimums von  $A_n/G_n$  als Funktion von  $a_n$ . Im übrigen längst bekannte Bemerkungen über Jensensche Ungleichungen zwischen Mittelwerten von Funktionen

und eine fehlerhafte Anwendung auf die Auswertung von  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ . W. Fenchel.

**Dockeray, N. R. C.:** An extension of Van der Mond's theorem and some applications. Math. Gaz. 17, 26—35 (1933).

Eine Lösung der Gleichung  $x^r + ax^s + b = 0$  wird auf elementarem Wege in eine unendliche Reihe entwickelt.

Otto Szász (Frankfurt a. Main).

**Godeaux, Lucien:** Sur les suites de Laplace terminées. (55. sess., Nancy, 20. VII. 1931.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 40—42 (1931).

**Belardinelli, G.:** Sulle funzioni di Legendre. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 65, 1029—1037 (1932).

Verf. entwickelt die zur  $n$ -ten Wurzel  $w$  von  $a$  benachbarte Nullstelle von  $y^n - a + xy^r \exp(ky) = 0$  [ $n, r$  ganze positive,  $k, a$  beliebige komplexe Zahlen] in der Umgebung von  $x = 0$  nach Potenzen von  $x$  und stellt unter Bezugnahme auf frühere Arbeiten (Ist. Lombardo, Rend., II. s. 63, fasc. VI—X (1930); ebd. 65, fasc. XI—XV, (1932); dies. Zbl. 5, 290) die Koeffizienten als Produkte einer Potenz von  $w$  mit einer Potenzreihe in  $w$  dar. Es wird gezeigt, daß die Ableitungen dieser Koeffizienten nach  $w$  (die assoziierten Legendreschen Funktionen) Summen von  $n$  verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen (in einer Variablen) sind. Entsprechendes für Gleichungen



$y^n - a + x_1 y^{r_1} \exp(k_1 y) + x_2 y^{r_2} \exp(k_2 y) = 0$ . Wegen weiterer Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

Haupt (Erlangen).

**Sansone, G.:** La chiusura dei sistemi ortogonali di Legendre, di Laguerre e di Hermite rispetto alle funzioni di quadrato sommabile. Giorn. Ist. Ital. Attuari **4**, 71–82 (1933).

L'A., con l'applicazione diretta di un teorema di Vitali, dimostra la chiusura dei sistemi ortogonali

$$\left\{ \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) \right\}, \quad \left\{ \frac{e^{-x}}{n!} L_n(x) \right\}, \quad \left\{ \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) \right\}$$

dove  $P_n(x)$ ,  $L_n(x)$ ,  $H_n(x)$  sono gli  $n$ -esimi polinomi di Legendre, Laguerre, Hermite, rispettivamente negli intervalli  $(-1, 1)$ ,  $(-\infty, 0)$ ,  $(-\infty, +\infty)$ , in rapporto alle funzioni  $f(x) \in L^2$ .

Autoreferat.

**Caccioppoli, Renato:** Sugli sviluppi in serie di funzioni ipersferiche e di polinomi biortogonali di Hermite. Rend. Semin. mat. Univ. Padova **3**, 163–182 (1932).

In Anschluß an „Appell et Kampé de Fériet: Fonctions hypergéométriques et hypersphériques etc.“ erinnert der Verf. im ersten Teile an die Definitionen und Haupteigenschaften der Hyperkugelfunktionen  $Y_n$ , wobei er sich auf einen vierdimensionalen Raum  $\Sigma$  beschränkt.  $O$  ist der Mittelpunkt der Kugel  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = \varrho^2$ , mit der Oberfläche  $S$ .  $P_n(z_1, z_2, z_3, z_4)$  ist ein homogenes Polynom  $n$ -ter Ordnung, mit  $(n+1)^2$

unabhängigen Koeffizienten, das der Gleichung  $\sum_{k=1}^4 \frac{\partial^2 P_n}{\partial z_k^2} = 0$  entspricht. Indem

man Polarkoordinaten  $z_1 = \varrho \cos \theta_1$ ,  $z_2 = \varrho \sin \theta_1 \cos \theta_2$ ,  $z_3 = \varrho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi$ ,  $z_4 = \varrho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \varphi$  einführt, setzt man  $P_n$  in die Form  $P_n = \varrho^n Y_n(\theta_1, \theta_2, \varphi)$ . Die so definierten Funktionen  $Y_n(\theta_1, \theta_2, \varphi)$  heißen „Hyperkugelfunktionen  $n$ -ter Ordnung“. Sie entsprechen der Orthogonalitätsrelation:

$$\int_S Y_m Y_n d\omega = 0 \quad (m \neq n), \quad (d\omega = \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\varphi).$$

Eine Funktion  $f(P)$ , die in allen Punkten  $P$  von  $S$  definiert ist, kann nun formell in eine Reihe von Hkf. entwickelt werden:

$$f(P) = \sum_0^\infty Y_n(P) \quad (1)$$

mit

$$Y_n(P) = \frac{n+1}{2\pi} \int_S f(Q) \frac{\sin(n+1)\gamma}{\sin \gamma} d\omega \quad (\gamma = \sphericalangle POQ). \quad (2)$$

Insbesondere werden die von der „Länge“  $\varphi$  unabhängigen „zonalen“ Hkf. betrachtet. Alle linear unabhängigen zonalen Hkf. entstehen aus der Hermiteschen Entwicklung:

$$(1 - 2a_1 x_1 - 2a_2 x_2 + a_1^2 + a_2^2)^{-1} = \sum_{r=0}^\infty \sum_{s=0}^\infty a_1^r a_2^s V_{r,s}(x_1, x_2)$$

mit

$$x_1 = \frac{z_1}{\varrho} = \cos \theta_1, \quad x_2 = \frac{z_2}{\varrho} = \sin \theta_1 \cos \theta_2.$$

Die  $n+1$  Polynome  $V_{r,s}$  mit  $r+s=n$  liefern ebensoviele zonale Hkf.  $Y_n$ . Die Polynome  $V_{r,s}$  sind aber nicht orthogonal. Nach Hermite wird nun ein zweites Polynomensystem  $U_{r,s}$  definiert mittels

$$\{(a_1 x_1 + a_2 x_2 - 1)^2 + (a_1^2 + a_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2)\}^{-\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^\infty \sum_{s=0}^\infty a_1^r a_2^s U_{r,s}(x_1, x_2).$$

Die Polynome  $U_{r,s}$  bilden zusammen mit den Polynomen  $V_{r,s}$  ein doppeltes biorthogonales Funktionensystem, d. h. sie entsprechen den Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_{x_1^2 + x_2^2 \leq 1} \int U_{r,s}(x_1, x_2) V_{r',s'}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0 \quad [(r-r')^2 + (s-s')^2 > 0],$$

$$\int_{x_1^2 + x_2^2 \leq 1} \int U_{r,s}(x_1, x_2) V_{r,s}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{\pi}{r+s+1} \frac{(r+s)!}{r! s!}.$$



Für diese Hermiteschen Polynome (nicht zu verwechseln mit den sonst in der Literatur bekannten Hermiteschen Polynomen [siehe z. B. Courant-Hilbert, Math. Phys. I, S. 76]) gilt u. a. die Verallgemeinerung des Rodriguesschen Satzes:

$$U_{r,s}(x_1, x_2) = \frac{(-1)^{r+s}}{2^{r+s}} \frac{1}{r! s!} \frac{\partial^{r+s}}{\partial x_1^r \partial x_2^s} (1 - x_1^2 - x_2^2)^{r+s}.$$

Eine Funktion  $f(x_1, x_2)$ , definiert in allen Punkten innerhalb des Kreises  $C$ , kann nun formell in eine Doppelreihe (bzw. einfache Reihe)

$$f(x_1, x_2) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{r,s} V_{r,s}(x_1, x_2) \quad (3)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r+s=n} A_{r,s} V_{r,s}(x_1, x_2) \quad (3')$$

entwickelt werden, mit

$$A_{r,s} = \frac{r+s+1}{\pi} \frac{r! s!}{(r+s)!} \iint_C f(x_1, x_2) U_{r,s}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (4)$$

Im zweiten Teile leitet der Verf. genügende Bedingungen für die Konvergenz des rechten Gliedes von (1) nach  $f(P)$  ab. Er beweist u. a.: Wenn die stetige Funktion  $f(P)$  definiert in allen Punkten  $P$  der Oberfläche  $S$  der vierdimensionalen Kugel der Lipschitzschen Bedingung

$$|f(P') - f(P)| \leq k PP' \quad (k \text{ konstant})$$

genügt, so ist sie entwickelbar nach der Reihe (1), wo die Funktionen  $Y_n$  mittels (2) bestimmt werden. — Im dritten Teile wird die formelle Entwicklung (3') näher betrachtet. Der Verf. beweist u. a.: Jede Funktion  $f(x_1, x_2)$ , definiert innerhalb des Kreises  $C$ , welche der Lipschitzschen Bedingung genügt, kann entwickelt werden nach der Reihe (3'), wo die Koeffizienten  $A_{r,s}$  mittels (4) bestimmt werden. — Im vierten und letzten Teile werden diese Konvergenzkriterien ausgedehnt, und es werden Unstetigkeiten der Funktionen in Betracht gezogen. An Hand des Beispiels

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_1 < -\cos \frac{\pi}{k}, \\ 0 & \text{für } x_1 > -\cos \frac{\pi}{k} \end{cases} \quad (k \text{ ganz} > 1)$$

zeigt der Verf., daß das Konvergenzverhalten dieser Reihen komplizierter ist als im Falle der gewöhnlichen Kugelfunktionen. S. C. van Veen (Dordrecht).

**Scherberg, M. G.:** The degree of convergence of a series of Bessel functions. Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 172–183 (1933).

In dieser Arbeit betrachtet der Verf. die bekannte Entwicklung

$$f(x) = B(x) + \sum_1^{\infty} B_n J_{\nu}(\lambda_n x), \quad \nu \geq 0 \quad (1)$$

wo die Größen  $\lambda_n$  die positiven Nullstellen der Gleichung

$$l \lambda J'_{\nu}(\lambda) + h J_{\nu}(\lambda) = 0 \quad (2)$$

bedeuten, und wo  $B(x)$  ein Zusatzglied ist, daß nur dann anwesend ist, wenn (2) ein Paar imaginäre Nullstellen  $\pm i \lambda_0$  besitzt. In bekannter Weise findet man

$$B_n = \frac{\int_0^1 x f(x) J_{\nu}(\lambda_n x) dx}{\int_0^1 x J_{\nu}^2(\lambda_n x) dx}.$$

Die Funktion  $B(x) \equiv 0$ , wenn  $l = 0$  oder wenn  $\frac{h}{l} + \nu = 0$ . — Der Verf. definiert nun als Konvergenzgrad der Reihe (1) die Größenordnung der Differenz zwischen der Funktion  $f(x)$  und  $B(x) + \sum_1^n B_n J_{\nu}(\lambda_n x)$ . — Die Arbeit zerfällt in drei Teile. Im ersten



Teile wird nur die Existenz der ersten Derivierten von  $f(x)$  vorausgesetzt. — Der Verf. beweist: I. Wenn im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  die Funktion  $f(x)$  absolut stetig, und  $f'(x)$  von beschränkter Variation ist, während außerdem:

$$\delta_l f(1) = \nu f(0) = 0 \quad (\delta_l = \begin{smallmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{smallmatrix} \text{ für } l = \begin{smallmatrix} 0 \\ \pm 0 \end{smallmatrix})$$

ist, so ist

$$f(x) - \left\{ B(x) + \sum_1^n B_n J_\nu(\lambda_n x) \right\} = \frac{K \theta(x, n)}{n^{\frac{1}{2}}} \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1.$$

Und II. Wenn  $\frac{f(x)}{x}$  von beschränkter Variation im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  ist, so ist im Intervall  $0 \leq a \leq x \leq b \leq 1$

$$f(x) - \left\{ B(x) + \sum_1^n B_n J_\nu(\lambda_n x) \right\} = \frac{K \theta(x, n)}{n x^{\frac{1}{2}}} + \frac{K \delta_l f(1) \theta(x, n)}{(1-x) n^{\frac{1}{2}}} + \frac{K \theta(x, n)}{x^{\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{2}}} + \frac{\nu f(0) K \theta(x, n)}{x^{\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{2}}},$$

wo  $a = 0$  nur im Falle  $\nu f(0) = 0$  ist, und  $b = 1$  im Falle  $\delta_l f(1) = 0$  ist. — Wenn  $a = 0$  ist, so ist

$$\frac{K \theta(x, n)}{n x^{\frac{1}{2}}} = \frac{K \theta(x, n)}{x^{\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{2}}} \equiv 0.$$

Die Größen  $K$  sind Konstanten, und  $|\theta(x, n)| < 1$ . — Im zweiten Teile werden diese Ergebnisse ausgedehnt auf den Fall, daß  $f(x)$  höhere Derivierte besitzt. — Im dritten Teile werden die positiven Nullstellen  $\lambda_n$  von (2) für

$$\lambda_n > \frac{4\bar{K}}{\pi} - \frac{\pi}{2}$$

abgeschätzt. Der Verf. findet

$$\lambda_n = (2\nu + 1) \frac{\pi}{4} + (n + k) \pi + \frac{2\bar{K}\theta}{(2\nu + 1) \frac{\pi}{4} + (n + k) \pi},$$

wo

$$\bar{K} = \frac{\pi}{2} \left[ \left| \nu + \frac{h}{l} \right| + \frac{2\sqrt{2}}{3} (\nu + 1)^2 \right] \quad \text{für } \nu > \frac{5}{2} \text{ und } k \text{ ganz und } \geq -3$$

und

$$\bar{K} = \frac{\pi}{2} \left[ \sqrt{2} + \left| \nu + \frac{h}{l} \right| \right] \quad \text{für } 0 \leq \nu \leq \frac{5}{2} \text{ und } k \text{ ganz und } \geq 0.$$

van Veen (Dordrecht).

Meijer, C. S.: Über die asymptotische Entwicklung von  $\int_0^{\infty - i(\arg w - \mu)} e^{\nu z - w \sinh z} dz$  ( $-\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2}$ ) für große Werte von  $|w|$  und  $|\nu|$ . II. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 35, 1291—1303 (1932).

In dieser Arbeit gibt der Verf. die Beweise der schon im ersten Teile mitgeteilten Ergebnisse (siehe dies. Zbl. 6, 19—20). Zunächst wird für die Funktion

$$T_\nu(w) = \int_0^{\infty - i(\arg w - \mu)} e^{\nu z - w \sinh z} dz \quad \left( -\frac{\pi}{2} < \mu < +\frac{\pi}{2} \right)$$

und ihre Derivierte mittels Konturintegration eine endliche Reihe mit Restglied abgeleitet, nämlich: Für  $\nu \neq 0$ ,  $0 < \alpha < \pi$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ,  $-\pi < \arg(\nu \sec \alpha) < \pi$ .

$\text{Max} \left\{ -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \arg(\nu \sec \alpha) \right\} < \mu < \text{Min} \left\{ +\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \arg(\nu \sec \alpha) \right\}$  ist für jedes ganze  $N \geq 0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\nu} \frac{dT_\nu(\nu \sec \alpha)}{d \sec \alpha} &= \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(2l+1)!}{\nu^{2l+2}} P_l(\sec \alpha) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty e^{i\mu}} e^{-\varrho} \varrho^{2N+1} d\varrho \int_{C_1} \frac{\Phi(t)^2 (\cosh x \sin y dx + \sinh x \cos y dy)}{\Phi(t)^{2N+2} (\Phi(t)^2 - \varrho^2)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



und

$$T_\nu(\nu \sec \alpha) = \left. \begin{aligned} & \sum_{l=1}^{N-1} \frac{(2l)!}{\nu^{2l+1}} Q_l(\sec \alpha) \\ & - \frac{\nu}{\pi} \int_{-\infty}^{\sec \alpha} \int_0^{\infty} e^{-\varrho} \varrho^{2N+1} d\varrho \int_{C_1} \frac{\Phi(t)^2 (\cosh x \sin y dx + \sinh x \cos y dy)}{\Phi(t)^{2N+2} (\Phi(t)^2 - \varrho^2)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Der Punkt  $t = x + iy$  durchläuft den von der Y-Achse verschiedenen, durch  $-\alpha i$  gehenden Ast der Kurve  $C_1$ , definiert durch die Gleichung:

$$x \cos \alpha - \sinh x \cos y = 0$$

von links nach rechts. —  $P_l(\sec \alpha)$  und  $Q_l(\sec \alpha)$  bedeuten schon im ersten Teile (l. c.) definierte Polynome in  $\frac{\sec \alpha}{\sec \alpha - 1}$ . Die Restglieder in (1) und (2) werden vom Verf. unter Benützung früherer Ergebnisse [Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **35**, 656, 852, 948, 1079 (1932); dies. Zbl. **5**, 161, 296; **6**, 19] abgeschätzt in der Form

$$\frac{\theta_1(2N+1)! P_N(\sec \alpha)}{\nu^{2N+2}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\theta_2(2N)! Q_N(\sec \alpha)}{\nu^{2N+1}},$$

wo für  $h = 1$  und  $h = 2$   $|\theta_h| < 1$  falls  $-\frac{\pi}{4} \leq \arg(\nu \sec \alpha) \leq \frac{\pi}{4}$ . Die oberen Schranken von  $|\theta_h|$  werden auch in allen anderen Fällen gegeben, doch diese letzten sind ziemlich kompliziert. S. C. van Veen (Dordrecht).

● Bochner, S.: Vorlesungen über Fouriersche Integrale. (Math. u. ihre Anwendungen in Monogr. u. Lehrbüchern. Begr. v. E. Hilb. Hrsg. v. E. Artin u. G. Kowalewski. Bd. 12.) Leipzig: Akad. Verlagsges. m. b. H. 1932. VIII, 229 S. RM. 14.40.

Chapter I (Grundlegende Eigenschaften trigonometrischer Integrale, 1—19) discusses some classical properties of the integrals of the form  $J(\alpha) = \int_a^b f(x) e^{i x \alpha} dx$  where the limits of integration might be infinite, mainly conditions for their convergence (simple, uniform, and absolute) and behavior for large values of the parameter  $\alpha$ . Chapter II (Darstellungs- und Summenformeln, 19—38) is devoted to a discussion of the two fundamental formulas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f\left(\frac{x}{n}\right) K(x) dx = f(+0) \int_0^\infty K(x) dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \int_0^\infty f\left(\frac{x}{n}\right) K(x) dx = \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(\xi) d\xi \right] \int_0^\infty K(x) dx,$$

which might be combined in one if the average about  $x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(\xi) d\xi$ , is introduced. Of

these, the former is classical, while the latter one is due essentially to N. Wiener; it is derived here under the assumptions: (I)  $K(x)$  is absolutely continuous on  $0 \leq x < \infty$ , (II)  $K(x) = O(x^{-2})$

as  $x \rightarrow \infty$ , (III)  $(1/x) \int_0^x |f(\xi)| d\xi$  is bounded for  $0 < x < \infty$ . The kernel  $K(x) = x^{-p} \sin x$ ,

$0 < p \leq 1$ , which leads to the Dirichlet integral when  $p = 1$ , requires, and is given, a special consideration. The results are applied to the derivation of the "Fourier integral formula" and of the Poisson summation formula. Chapter III (Das Fouriersche Integraltheorem, 39—62) treats of the theory and applications of the Fourier integral theorem, with particular attention given to the Fourier inversion formulas. The following result (which might be interpreted as a uniqueness theorem) deserves a separate mention: Let  $f(x) \in L$  over  $(-\infty, \infty)$

and let  $E(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f(\xi) e^{-i\xi\alpha} d\xi$  be the "Fourier transform" of  $f(x)$ . If the integral  $\int_{-\infty}^\infty E(\alpha) e^{i x \alpha} d\alpha$  converges (even as a Cauchy principal value) for almost all  $x$  of an interval  $(a, b)$ , then it is equal to  $f(x)$  almost everywhere on  $(a, b)$ . Hence the two function-classes,



$\mathfrak{F}_0 \equiv L$  over  $(-\infty, \infty)$  and  $\mathfrak{I}_0$ , consisting of all transforms of elements of  $\mathfrak{F}_0$ , are in one to one correspondence. The classical fact is pointed out that the "Faltung-Operation",  $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t)f_2(t)dt$  in  $\mathfrak{F}_0$  corresponds to the multiplication of the transforms of  $f_1(x)$  and  $f_2(x)$  in  $\mathfrak{I}_0$ . The chapter closes with applications of the general theory to the evaluation of numerous definite integrals, simple and multiple. Chapter IV (Stieltjesche Integrale, 63—82) is devoted to a study of the function-class  $\mathfrak{P}$ , which admit of a representation  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dV(\alpha)$ , where  $V(\alpha)$ , a "distribution function", is bounded in  $(-\infty, \infty)$  and monotone increasing, and is normalized according to  $V(\alpha) = \frac{1}{2}[V(\alpha + 0) + V(\alpha - 0)]$ . The inversion formula

$$V(\varrho) - V(0) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} f(x) (e^{-i\varrho x} - 1) (-ix)^{-1} dx$$

is established, which allows a suitable extension of the uniqueness- and "Faltungs"-theorems to the present, more general situation. After a discussion of various convergence properties of sequences of functions of  $\mathfrak{P}$ , the chapter closes with a proof of the fact that the class  $\mathfrak{P}$  is identical to the class of "positive-definite" functions  $f(x)$ , which is characterized by the following properties: (I)  $f(x)$  is bounded on  $(-\infty, \infty)$ ; (II)  $f(x)$  is "hermitian", that is  $\overline{f(-x)} = f(x)$ ; (III) no matter what are the real numbers  $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$  and the complex numbers  $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m, \dots$ , always  $\sum_{\mu, \nu=1}^m f(x_\mu - x_\nu) \varrho_\mu \overline{\varrho_\nu} \geq 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Some applications to the spectral

analysis of almost periodic functions are indicated. Chapter V (Das Operieren mit den Funktionen der Klasse  $\mathfrak{F}_0$ , 82—110) deals with the operational calculus and its applications to various functional (integral and difference-differential) equations. Here the author systematizes and extends methods of the fundamental memoir of N. Wiener [Math. Ann. **95**, 557 bis 584 (1926)]. Only "solutions"  $\subset \mathfrak{F}_0$  are being considered in this chapter. The basis of the whole discussion is the notion of the "multipliers" which are defined as a class of functions  $\Gamma(\alpha)$ , continuous on  $(-\infty, \infty)$  and such that  $\Gamma(\alpha)E(\alpha) \subset \mathfrak{I}_0$ , whenever  $E(\alpha) \subset \mathfrak{I}_0$ . If  $E(\alpha)$  is the transform of  $f(x)$  then the function of  $\mathfrak{F}_0$  whose transform is  $\Gamma(\alpha)E(\alpha)$  is conveniently designated by  $\Gamma[f]$ . By a suitable choice of the multiplier  $\Gamma(\alpha)$  it is possible to "isolate" out of the complete set  $E(\alpha)$  of "harmonics" of  $f(x)$  the set of harmonics situated in any preassigned range  $(\alpha_1, \alpha_2)$  of frequencies. Chapter VI (Verallgemeinerte trigonometrische Integrale, 110—144) treats of transforms of the functions of class  $\mathfrak{F}_k$ , such that

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| [1 + |x|^k]^{-1} dx < \infty.$$

These transforms are defined, up to a polynomial in  $\alpha$  of degree  $\leq k-1$ , by the formula

$$E(\alpha, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (e^{-i\alpha x} - L_k) (-ix)^{-k} dx, \text{ where } L_k \equiv L_k(\alpha, x) = \sum_0^{k-1} (-i\alpha)^v (v!)^{-1} \text{ or } 0,$$

according as  $|x| \leq 1$ , or  $> 1$ . The notion of these transforms has been introduced essentially by Wiener (in case  $k=2$ ) and, in the general case, by the author [Math. Ann. **97**, 635—662 (1927)]. The principal results of chapters III and V, including uniqueness theorems and the theory of multipliers can be extended in such a way as to hold for the functions  $\subset \mathfrak{F}_k$ . This finally allows to develop the operational calculus and its applications to functional equations in the space  $\mathfrak{F}_k$ . Chapter VII (Analytische und harmonische Funktionen, 145—169) contains a rapid exposition of properties of Laplace transforms in connection with a theory of representation of analytic and harmonic functions by means of Laplace integrals. The following result should be mentioned separately. Let  $f(s)$ ,  $s = \sigma + it$ , be analytic in the strip  $\lambda < \sigma < \mu$

and, as a function of  $t$ ,  $\subset \mathfrak{F}_0$  for all  $\sigma$ ,  $\lambda < \sigma < \mu$ . Then  $E(\alpha) = (2\pi i)^{-1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) e^{-\alpha s} ds$  does not depend on  $c$ ,  $\lambda < c < \mu$ , and  $f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s\alpha} E(\alpha) d\alpha$ , the integral being absolutely convergent. An analogous result is obtained if  $f(s) \subset \mathfrak{F}_k$  instead of  $\mathfrak{F}_0$ . In chapter VIII (Quadratische Integrierbarkeit, 169—183) fundamental properties of Plancherel and Hankel transforms are discussed. Chapter IX (Funktionen von mehreren Veränderlichen, 183—208) some parts of the preceding theory are extended to the case of functions of several variables. An extension of the Poisson summation formula with some applications is of a particular interest. The book closes with an "Anhang" (208—219) where proofs are given of several facts of the theory of functions of a real variable used in the text. It is apparent from the preceding ac-

count that the monograph in question contains very interesting and variegated material, part of which being new, either entirely or methodologically. There is no doubt that it will be of great value to any student of the subject. Some remarks should be made, however, concerning the selection of material, exposition, and bibliographical references. (1) The theory of Fourier transforms in the spaces  $L_p$ ,  $p \neq 2$ , and the theory of the conjugate integrals are missing in the monograph. (2) The exposition, as a rule, is clear and precise; it is unfortunate, however, that the well established term "totalstetige Funktion" is replaced by "differenzierbare Funktion". Even this terminology is not always used consistently, e. g., on p. 49, where the same term is apparently replaced by "a function which possesses an absolutely integrable derivative", which of course is an entirely different thing. Some proofs might have been replaced by shorter and simpler ones, e. g., those in 5., p. 119, and 8., p. 121. (3) The book contains numerous historical and bibliographical references (pp. 219—227). It is the more surprising that some fundamental papers are not mentioned at all. Those are, for instance, the papers by Wiener [Acta Math. **55**, 117—258 (1930); Ann. of Math., II. s. **33**, 1—100 (1932)]; by M. Riesz [Math. Z. **27**, 218—244 (1927)]; by Widder [Trans. Amer. Math. Soc. **31**, 694—743 (1929); **33**, 851—892 (1931)]. In a few cases the references are not quite exact. This is for instance the case with the reference 22), p. 28: the statement, ascribed to Hardy, that the conditions (a)  $f(\xi)/\xi$  has an absolutely integrable derivative, and (b)  $f'(\xi)/\xi$  is absolutely integrable (as  $\xi \rightarrow \infty$ ), are equivalent, is in fact not correct, as is shown by the example  $f(\xi) = \xi/\log \xi$ . Such statement, as far as the reviewer is aware, has not been made by Hardy. (cf. this Zbl. **4**, 59 [Wiener] and **3**, 122 [Widder]).

J. D. Tamarkin (Providence).

**Biernacki, M.:** Sur une propriété des séries doubles. Ann. Soc. Polon. math. **10**, 12—14 (1932).

Il existe plusieurs sortes de convergence des séries doubles  $\sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$  [v. F. Leja: Math. Ann. **103**, 364—368 (1930)]. L'auteur considère la suivante et démontre ce que voici: Étant donné le tableau infini:

$$\begin{array}{c} O \quad \xrightarrow{\quad A \quad} \\ \begin{array}{ccc} a_{00} & a_{01} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \\ \downarrow B \end{array}$$

soit  $D_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) le domaine délimité par les rayons  $OA$  et  $OB$  et par une courbe continue  $C_n$  sans points doubles joignant un point  $a_n$  de  $OA$  avec un point  $b_n$  de  $OB$ . Supposons qu'on ait:  $D_n \subset D_{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), et que chacun des termes  $a_{\mu\nu}$  appartienne à presque tous les  $D_n$ , et soit  $S_n$  la somme de tous les termes  $a_{\mu\nu}$  appartenant à  $D_n$ . Or, si la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$  existe et si elle est indépendante du choix des courbes  $C_n$  (remplissant les conditions imposées) la série double  $\sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$  converge toujours absolument.

F. Leja (Warszawa).

**Gergen, J. J.:** Convergence criteria for double Fourier series. Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 29—63 (1933).

L'auteur examine la convergence des séries de Fourier doubles

$$f(u, v) \sim \sum_{m, n=0}^{\infty} \lambda_{mn} a_{mn} \cos mu \cdot \cos nv \quad (1)$$

des fonctions paires  $f(u, v)$  intégrables au sens de Lebesgue dans le carré  $Q(0, 0; \pi, \pi)$ , où  $\lambda_{00} = \frac{1}{4}$ ,  $\lambda_{m0} = \lambda_{0n} = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda_{mn} = 1$  pour  $m > 0$  et  $n > 0$  et

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \iint_Q f(u, v) \cos mu \cdot \cos nv \cdot du \cdot dv.$$

Il étend à ces séries certains criteria de convergence des séries de Fourier simples (ceux de Lebesgue, Young et Hardy-Littlewood) ou généralise certains criteria connus relatifs aux séries de Fourier doubles et il examine les relations logiques entre ces criteria nouveaux ou connus [v. W. H. Young: Proc. London Math. Soc. **11**, 133 bis 184 (1913); G. H. Hardy: Quart. J. of pure and appl. mathem. **37**, 53—79 (1905); L. Tonelli: Serie trigonometriche. Bologna 1928]. Voici un des théorèmes démontrés



par l'auteur: La série (1) converge vers la somme  $s$  au point  $u = v = 0$  si les conditions suivantes sont remplies:

$$\begin{aligned} 1. \int_{kx}^{\pi-x} \frac{du}{u} \int_{ky}^{\pi-y} |\Delta_{xy} f| \frac{dv}{v} &= \bar{o}(1), & 2. \int_0^x du \int_{ky}^{\pi-y} |\Delta_{xy} f| \frac{dv}{v} &= \bar{o}(x), \\ 3. \int_0^y dv \int_{kx}^{\pi-x} |\Delta_{xy} f| \frac{du}{u} &= \bar{o}(y), & 4. \int_0^x dx \int_0^y [f(u, v) - s] dv &= o(x \cdot y), \end{aligned}$$

où

$$\Delta_x f = f(u+x, v) - f(u, v), \quad \Delta_{xy} f = f(u+x, v+y) - f(u+x, v) - f(u, v+y) + f(u, v),$$

$$g(x, y; k) = \bar{o}\{h(x, y; k)\} \quad \text{si} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{(x, y) \rightarrow (0+, 0+)} \left| \frac{g}{h} \right| = 0$$

et

$$g(x, y) = o\{h(x, y)\} \quad \text{si} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0+, 0+)} \frac{g}{h} = 0. \quad \text{Leja (Warszawa).}$$

**Frenzen, Egon:** Das asymptotische Verhalten einiger Eulerschen Produkte. Kiel: Diss. 1931. 39 S.

Verf. untersucht das asymptotische Verhalten der Eulerschen Produkte

$$P(x) = \prod_{v=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^v} \quad \text{und} \quad P^{(2)}(x) = \prod_{v=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{v^2}}, \quad 0 \leq x < 1,$$

wenn  $x$  gegen 1 strebt. Im ersten Abschnitt zeigt Verf., daß sich das asymptotische Verhalten des ersten Produktes ohne funktionentheoretische Hilfsmittel erkennen läßt, wenn man von der zur Bestimmung einer Konstanten erforderlichen Auswertung eines gewissen Integrals absieht. Nach einfachen Umformungen erhält er eine Darstellung

$$\log P(e^{-1/p}) = \frac{e^{-1/p}}{1 - e^{-1/p}} \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{pq} \sigma_q \quad (1)$$

mit reellem  $p \geq 1$ ,  $\sigma_q = \sum_{m=1}^q \frac{1}{m^2}$  und einer gewissen „Matrix“  $\alpha_{pq}$ . Durch Anwendung des Toeplitzschen Konvergenzsatzes folgt zunächst

$$\log P(e^{-1/p}) = \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{1 - e^{-1/p}} + o(p). \quad (2)$$

Um dies Resultat zu verschärfen, führt Verf. die Summe  $s_q$  der ersten  $q$  Glieder der  $\sigma$ -Folge und statt der  $\alpha_{pq}$  eine aus dieser durch Differenzenbildung innerhalb einer Zeile hervorgehende Matrix  $a_{pq}$  ein, wonach

$$\log P(e^{-1/p}) = \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} s_q \quad (3)$$

wird; die  $a_{pq}$  enthalten noch den Faktor  $\frac{e^{-1/p}}{1 - e^{-1/p}}$ . Hier zeigt sich erstens, daß die Matrix der  $a_{pq}$  u. a. die wesentliche Eigenschaft der gestrahlten Matrizen im Sinne der Theorie von Robert Schmidt besitzt; zweitens wird durch das bekannte asymptotische Verhalten der Folge der  $s_q$ , nämlich durch die Darstellung  $s_q = \frac{\pi^2}{6} q - \log q + \frac{\pi^2}{6} - C - 1 + o(1)$  eine Aufspaltung der Summe in (3) nach den Termen verschiedener Größenordnung von  $s_q$  nahegelegt. Die Betrachtung der einzelnen Bestandteile dieser Summe führt unter ständiger Verwendung der Eigenschaften der Matrix ( $a_{pq}$ ) zu dem Resultat:

$$P(x) \cong \sqrt{\frac{1-x}{2\pi e^{\pi^2/6}}} e^{\pi^2/6 \frac{1}{1-x}} \quad \text{für} \quad x \rightarrow 1.$$

Die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von  $P^{(2)}(x)$  verläuft analog, indessen sind die technischen Schwierigkeiten größer. Während die  $\alpha_{pq}$  sich vermöge des

elementaren Ausdrucks für  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$  selbst als elementare Funktionen ihrer Indizes erweisen, geht in die Darstellung der den  $\alpha_{pq}$  bei diesem Problem entsprechenden Größen die „halbe  $\vartheta$ -Reihe“  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$  ein. Die Transformationsformel der  $\vartheta$ -Funktion liefert aber eine so genaue Aussage über das asymptotische Verhalten der neuen  $\alpha_{pq}$ , daß sich der erste Beweis übertragen läßt. Es ergibt sich für  $x \rightarrow 1$

$$P^{(2)}(x) \cong \sqrt{\frac{1-x}{2\pi c}} c^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad c = e^{\zeta(3/2)}.$$

Peterisson (Hamburg).

**Lorentz, Georg:** Über lineare Summierungsverfahren. Rec. math. Soc. math. Moscou 39, Nr 3, 44–50 (1932).

$M$  sei die Gesamtheit aller monoton abnehmenden und konvergenten Folgen. Damit durch eine Matrix  $(a_{mn})$  jeder solchen Folge  $x_i$  eine konvergente Folge  $y_m = \sum_{i=1}^{\infty} a_{mi} x_i$  zugeordnet wird, sind notwendig und hinreichend die Bedingungen 1. alle  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn}$  existieren, 2. alle  $\sigma_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$  existieren und streben einem Grenzwert  $\sigma$  zu, 3. es gibt eine feste, von  $m, p$  unabhängige Zahl  $M$ , so daß  $\left| \sum_{n=1}^p a_{mn} \right| < M$ . Dasselbe gilt für die Gesamtheit aller Folgen  $x_i$  mit  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n-1} - x_n|$  konvergent. Damit die Mittelbildung, die  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  die Summe  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(x)$  zuordnet, permanent ist, sind nach O. Perron [Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen, Math. Z. 6 (1920)] hinreichend die Bedingungen 1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = 1, k = 0, 1, \dots$  2.  $\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)| < M$  unabhängig von  $x$ . Verf. zeigt, daß sie notwendig sind. Köthe (Münster).

### Differentialgleichungen:

**Tsortsis, A.:** Über eine integrallose Lösung einer Diophantischen Differentialgleichung. Ann. Soc. Polon. math. 10, 25–28 (1932).

**Chiellini, Armando:** Sopra l'integrazione di particolari equazioni differenziali del secondo ordine. Boll. Un. Mat. Ital. 12, 12–15 (1933).

**Lusin, N.:** Sur l'étude qualitative de l'équation du mouvement d'un train. Rec. math. Soc. math. Moscou 39, Nr 3, 6–26 u. franz. Zusammenfassung 26 (1932) [Russisch].

Die Aufgabe führt auf die qualitative Untersuchung der Differentialgleichung  $\frac{dy}{dx} = \Psi(y) + \Phi(x)$ , wo  $\Psi(y)$  eine monoton fallende Funktion von  $y$  ist, die für einen bestimmten Wert  $y_0$  verschwindet;  $\Psi''(y) > g$  ( $g > 0$ );  $\Phi(x)$  wird beschränkt und gleichmäßig stetig im Intervall  $(-\infty, +\infty)$  vorausgesetzt. Verf. zeigt, daß in diesem Falle eine und nur eine ausgezeichnete Lösung existiert, die im Intervall  $(-\infty < x < +\infty)$  zwischen festen Schranken liegt; alle anderen Lösungen nähern sich für  $(t \rightarrow +\infty)$  asymptotisch dieser Lösung. Ist  $\Phi(x)$  periodisch, so ist die ausgezeichnete Lösung ebenfalls periodisch (mit derselben Periode). A. Andronow u. A. Witt (Moskau).

**Boros, Eleutherios:** Über Riccatische Gleichungen von einer bestimmten Form. Bull. Soc. Math. Grèce 13, Nr 2, 22–23 (1932) [Griechisch].

Vorgelegt sei die Riccatische Differentialgleichung  $dy/dx + A + By + Cy^2 = 0$ , in der die Koeffizienten  $A$  und  $B$  Funktionen von  $x$  sein sollen,  $C$  dagegen eine Konstante. Verf. behandelt die Aufgabe, wenn  $B$  und  $C$  gegeben sind,  $A$  so zu bestimmen, daß sich die Riccatische Differentialgleichung auf eine Bernoullische zurückführen läßt.

Bessel-Hagen (Bonn).



**Sansone, G.:** Sugli autovalori per le equazioni differenziali lineari del terzo ordine e sopra due classi di equazioni del terzo ordine le quali ammettono infiniti autovalori tutti reali. *Rend. Semin. mat. Univ. Padova* **3**, 128—140 (1932).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit [*Rend. Semin. mat. Univ. Padova* **1**, 164 bis 183 (1930)] wird gezeigt: Die Differentialgleichung

$$(\theta \cdot y')'' + \lambda(Ay) + \lambda By = 0,$$

$\theta'', A', B'$  in  $(a, b)$  stetig,  $\theta$  dort positiv, besitze abzählbar unendlich viele Eigenwerte, d. h. Werte  $\lambda$  für die es nicht identisch verschwindende Lösungen  $y$  mit  $y(a) = y(b) = y(c)$  und  $a < c < b$  gibt; ordnet man diese Eigenwerte nach nichtfallenden Beträgen, so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - \varepsilon / |\lambda_n| = 0$  für jedes positive  $\varepsilon$ . Wenn außer den genannten Voraussetzungen gilt  $A \geq 0$  in  $(a, b)$ ,  $B \leq 0$  in  $(a, c)$ ,  $B \geq 0$  in  $(c, b)$  oder  $A \leq 0$  in  $(a, b)$ ,  $B \geq 0$  in  $(a, c)$ ,  $B \leq 0$  in  $(c, b)$ , so gibt es mindestens einen Eigenwert  $\lambda$ . Weiter werden Klassen von Differentialgleichungen angegeben, bei denen unendlich viele Eigenwerte garantiert sind.

*Rellick* (Göttingen).

**Wilkosz, W.:** Sur l'intégrale fondamentale de l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre. *Ann. Soc. Polon. math.* **10**, 94—106 (1932).

In engster Anlehnung an E. Kamke wird ein Existenzsatz für die Differentialgleichung  $dy/dx = f(x, y)$  hergeleitet, wobei allerdings mehrfach zusammenhängende Bereiche zugelassen werden.

*Willy Feller* (Kiel).

**Pfeiffer, G.:** Sur les solutions linéairement indépendantes des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **16**, 427—428 (1932).

Im wesentlichen besteht der Inhalt des Aufsatzes in Bemerkungen von folgender Art: Wenn die Funktionen  $\varphi_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , der part. Diffgl.  $f_y = 0$  genügen, so sind die Ränge der beiden Matrizen  $\|\varphi, \varphi'_x, \varphi'_y, \varphi''_{xx}, \varphi''_{xy}, \varphi''_{yy}, \dots, \varphi^{(r-1)}_{xx\dots x}, \varphi^{(r-1)}_{xx\dots xy}, \dots, \varphi^{(r-1)}_{yy\dots y}\|$  und  $\|\varphi, \varphi'_x, \varphi''_{xx}, \dots, \varphi^{(r-1)}_{xx\dots x}\|$  einander gleich.

*O. Borůvka* (Brno).

**Drach, Jules:** Sur l'intégration par quadratures de l'équation des lignes géodésiques. *C. R. Acad. Sci., Paris* **196**, 310—315 (1933).

Es werden die Fälle bestimmt, in denen die Differentialgleichung der geodätischen Linien für das Linienelement  $ds^2 = 4\lambda \cdot du dv$  ein erstes Integral besitzt von der Gestalt

$$\Phi = a + m_0 \log \omega + \sum m_i \log(\omega - \gamma_i);$$

dabei ist  $\omega = \lambda \cdot du/dv$ , die  $m_i$  sind gegebene komplexe Zahlen,  $a, \gamma_i$  und  $\lambda$  sind die zu bestimmenden Funktionen von  $u$  und  $v$ .

*Willy Feller* (Kiel).

**Steen, S. W. P.:** The spectrum of the self-adjoint partial differential equation in any domain. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **29**, 23—44 (1933).

Die Arbeit beschäftigt sich mit der selbstadjungierten Differentialgleichung in  $n$  Dimensionen

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( p_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - qu + q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

wobei  $\sum_{i,j=1}^n p_{ij} x_i x_j \geq 0$  für alle  $x_i$  aus dem Grundgebiet  $D$  und alle  $X_i$  sein soll.  $D$  ist

ein  $n$ -dimensionaler Riemannscher Raum, der entweder unberandet ist oder abzählbar viele  $(n-1)$ -dimensionale Ränder besitzt. Es werden die verschiedensten hierhergehörigen Probleme (Randwertprobleme, Greensche Funktion, Eigenwertproblem, allgemeine Lösung usw.) behandelt. Sowohl in den Beweisen als auch in den Behauptungen ist dem Referenten manches unverständlich.

*Rellick* (Göttingen).

**Brillouin, Marcel:** Équations linéaires aux dérivées partielles dans le plan. Domaines à connexion multiple. Construction des intégrales pour des conditions données aux frontières. *C. R. Acad. Sci., Paris* **196**, 307—310 (1933).

Verf. möchte die Randwertaufgaben für lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehrfach zusammenhängenden Bereichen folgendermaßen lösen. Zunächst wird die Potentialgleichung behandelt, indem für die Lösung  $V$  in bekannter

Weise eine Laurententwicklung angesetzt wird; die Koeffizienten werden so bestimmt, daß der mittlere Fehler der Randwerte zum Minimum wird. Eine beliebige Gleichung  $L(u) = 0$  wird nun „gelöst“, indem zur Lösung  $V$  der Potentialgleichung, die dieselben Randwerte besitzt, eine Reihe  $\sum C_n v_n$  hinzugefügt wird, wobei die  $v_n$  ein geeignet normiertes vollständiges System bilden, und alle  $v_n$  am Rande verschwinden. Die Koeffizienten sollen so bestimmt werden, daß das Integral über das Quadrat von  $L(V + \sum C_n v_n)$  zum Minimum wird. Die angegebene explizite Formel für die Koeffizienten ist aber falsch. Konvergenzfragen werden nicht behandelt. Charakteristisch ist, daß ein Unterschied zwischen elliptischen und hyperbolischen Gleichungen nicht in Erscheinung tritt, trotzdem die Randwertaufgaben für letztere unlösbar sind.

Willy Feller (Kiel).

**Kourensky, M.: L'intégration des équations aux dérivées partielles du 2<sup>nd</sup> ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes. I. Cas général.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 415—420 (1932).

**Kourensky, M.: L'intégration des équations aux dérivées partielles du 2<sup>nd</sup> ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes. — II. Systèmes contenant cinq dérivées du second ordre.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 496—499 (1932).

**Kourensky, M.: L'intégration des équations aux dérivées partielles du 2<sup>nd</sup> ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes. III. Systèmes contenant quatre dérivées du second ordre.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 567—571 (1932).

Gegeben sind zwei Gleichungen  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = 0$ , wobei  $F_1$ ,  $F_2$  von zwei Variablen  $x$ ,  $y$ , zwei unbekannten Funktionen  $z(x, y)$ ,  $z'(x, y)$  und den partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der  $z$ ,  $z'$  abhängen. Es wird durch formale Entwicklungen ein System linearer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung aufgestellt, dem eine Funktion  $\Phi$  derselben Argumente genügen muß, damit die Gleichung  $\Phi = \text{konst.}$  mit den  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = 0$  kompatibel sei. Diese Mitteilungen hängen mit mehreren früheren Arbeiten des Verf. [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. 10, 148—154 (1929); 13, 293—300 (1930); 14, 408—414 (1931); 15, 348—353 (1932); dies. Zbl. 3, 396; 4, 215] sehr eng zusammen.

G. Cimmino (Napoli).

**Artemieff, N.: Die Anwendung des Störungsverfahrens zur Berechnung der Eigenwerte bei Deformation des Randes.** Rec. math. Soc. math. Moscou 39, Nr 3, 52—65 (1932).

Als „gestörtes“ System wird ein System behandelt, dessen Differentialgleichung und dessen Randbedingungen mit denen des ursprünglichen identisch sind, dessen Randkurve jedoch von der Randkurve des ursprünglichen Systems (Membran, Platte usw.) abweicht. Eigenwerte und Eigenfunktionen der „gestörten“ Aufgabe werden in bekannter Weise in der Umgebung der Eigenwerte und Eigenfunktionen des ungestörten Problems nach einem „Störungsparameter“ entwickelt; desgleichen die Randwerte, desgleichen die Normen für das gestörte Problem. Die Entwicklungsfunktionen und Koeffizienten ergeben sich dann durch Rekursion aus den Lösungen des Grundproblems. Vier einfache Beispiele zeigen die praktische Anwendung der Methode.

Hohenemser (Göttingen).

**Schauder, J.: Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du type elliptique.** C. R. Acad. Sci., Paris 196, 89—90 (1933).

Un lemme énoncé peu auparavant par l'aut. (voir Zbl. 6, 57) est ici remplacé par un autre qui entraîne l'extension du théorème de Harnack aux équations du type elliptique  $\sum_{i,k} a_{i,k} \partial^2 u / \partial x_i \partial x_k = f$ , quand les  $a_{i,k}$  et  $f$  remplissent des conditions de Hölder; l'aut. s'en sert pour résoudre le problème de Dirichlet relatif à l'équation linéaire générale du type elliptique, quand les coefficients autres que les  $a_{i,k}$  sont continus, ainsi que les valeurs données à la frontière. Pour les équations à deux variables, l'aut. énonce un autre lemme, susceptible d'extension à un nombre quelconque de variables, et relatif au cas où les  $a_{i,k}$  sont continus sans plus; c'est une inégalité où



figure l'intégrale de la somme des carrés des dérivées secondes, cette intégrale étant étendue à un ensemble fermé intérieur au domaine donné. *Georges Giraud.*

**Rosenblatt, Alfred:** Sur les théorèmes de M. Picard dans la théorie des équations aux dérivées partielles non linéaires du type elliptique. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 460—462 (1933).

**Brelot, Marcel:** Sur un théorème de non-existence relatif à l'équation  $\Delta u = c(M)u(M)$  ( $c \geq 0$ ). Bull. Sci. math., II. s. 56, 389—395 (1932).

Using the notation, and extending the result, of his previous work the author proves that, being given an arbitrary bounded domain (open and connected)  $\Omega$  (in a plane), it is always possible to select  $c(M)$  (continuous and  $\geq 0$ ) in such a way that the only solution of the equation above, which is bounded on  $\Omega$ , is identically zero. The proof is based on the fact that the following three statements are equivalent: (A) Every bounded closed (plane) set  $E$  of positive capacity admits of at least one regular point; (B) A harmonic function which is bounded on a bounded domain  $\Omega$  and vanishes at each regular point of the boundary, is identically zero; (C) Every harmonic function which is bounded on a bounded domain  $\Omega$  and vanishes at each regular point of the boundary, except for those belonging to a set of zero capacity, is identically zero. [The equivalence of (A) and (B) was established by Kellogg (Acta Litt. Sci. Szeged 4, 1—5 (1928—1929); cf. also Vasilescu (Ibidem, 186—187)].

*J. D. Tamarkin* (Providence).

**Masotti, A.:** Sopra una notevole funzione ed il suo intervento in varie questioni fisico-matematiche. Rend. Semin. mat. fis. Milano 6, 127—177 (1932).

L'a. riprende lo studio della funzione  $G(M)$  che si deduce dalla funzione di Green  $\mathcal{G}_{MP}$  di un campo semplicemente connesso  $C$  per mezzo della formula

$$G(M) = \lim_{P \rightarrow M} \left\{ \log \frac{1}{MP} - \mathcal{G}_{MP} \right\}.$$

Nel presente lavoro, oltre ad un breve riassunto dei risultati anteriori (v. Zbl. 3, 82 e 83), l'a. studia il comportamento di  $G(M)$  al contorno di  $C$ , e mostra che la funzione  $2G(M)$  dà l'unica soluzione dell'equazione di Liouville  $\Delta_2 u = 8e^u$ , che è „regolare“ in  $C$  e soddisfa, sul contorno, alla condizione  $\lim_{n=0} \left\{ G(M) - \log \frac{1}{2n} \right\} = 0$ , ove  $n$  è la minima distanza da  $M$  al contorno. Il comportamento al contorno è studiato coll'ausilio di una rappresentazione conforme di  $C$  su un cerchio, mentre l'unicità viene dedotta da un teorema di Picard. — Nella seconda parte delle Memorie l'a. 1°. dà un'interpretazione geometrica della  $G(M)$ ; 2°. applica la  $G(M)$  allo studio del moto di un liquido con un vortice puntiforme (cfr. Zbl. 4, 85) aggiungendo nuovi risultati per i piccoli moti del vortice vicino ad una posizione di equilibrio stabile; 3°. dà un'applicazione elettrodinamica della  $G(M)$  alla questione del campo creato da una corrente che percorre un filo rettilineo e ritorna attraverso un conduttore cilindrico avvolgente il filo; 4°. mostra come la  $G(M)$  dà un'espressione analitica di alcuni risultati del Laue per l'emissione termo-elettronica; 5°. mostra la possibilità di una generalizzazione della  $G(M)$  a campi spaziali.

*Vladimiro Bernstein* (Milano).

**Ignatovskij, V.:** Fortpflanzung von Störungen in inhomogenen isotropen Medien. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 7, 857—905 (1932).

Für die Wellengleichung  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$  mit festem  $c$  läßt sich bei einem Anfangszustand  $[u]_{t=0} = g(x, y, z)$  und  $\left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t=0} = h(x, y, z)$ , der lediglich in dem von einer beschränkten geschlossenen Fläche  $S$  berandeten Innengebiet  $T$  von Null verschieden ist, der Zeitpunkt  $t = t_0$ , in dem in einem dem Außengebiet  $T'$  von  $S$  angehörenden Aufpunkt  $P_0$  die Wirkung einsetzt, zu  $ct_0 = d$  angeben, unter  $d$  den kürzesten Abstand des Punktes  $P_0$  von der Fläche  $S$  verstanden; für  $ct > d$  wird der Zustandsverlauf in  $P_0$  durch die Poissonsche Wellenformel beschrieben. Den Gegenstand der vorliegenden

Arbeit bildet die Verallgemeinerung dieser Fragestellung auf den Fall einer Wellengleichung von der Form

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,k=1}^n a^{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} + \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + gu,$$

wobei die  $a^{ik} = a^{ki}$ ,  $b^i$  und  $g$  zeitunabhängige Funktionen der Koordinaten  $x^i$  sind, während  $c$  wieder eine Konstante (z. B. Lichtgeschwindigkeit im Vakuum) bedeutet; dem entspricht im allgemeinen ein anisotropes inhomogenes Medium, doch werden die Betrachtungen auf ein isotropes inhomogenes Medium eingeschränkt und insbesondere auf den Fall  $n = 3$  spezialisiert.

Harry Schmidt (Köthen).

**Soboleff, S.: L'équation d'onde sur la surface logarithmique de Riemann.** C. R. Acad. Sci., Paris 196, 49—51 (1933).

Im Anschluß an frühere Veröffentlichungen des Verf. [C. R. Acad. Sci., Paris 194, 1437 u. 1797 (1932); dies. Zbl. 4, 279; Publ. Institut séismologique de l'Acad. Sci. de l'U.R.S.S., Nr 20, 1 (1932)] wird das Problem der Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

auf der Riemannschen Fläche des Logarithmus bei gegebenen Anfangsbedingungen behandelt. Die Einführung einer komplexen unabhängigen Veränderlichen gestattet die Darstellung einer von Volterra für  $at < \rho + \rho_0$  angegebenen Lösung der Wellengleichung in Form eines Kurvenintegrals in der Ebene eines komplexen Parameters, wodurch nach Fortsetzung für alle Werte von  $t$  die Volterrasche allgemeine Theorie anwendbar wird.

Harry Schmidt (Köthen).

**Soboleff, S.: Sur un problème de la diffraction des ondes.** C. R. Acad. Sci., Paris 196, 104—105 (1933).

Indem die für  $0 \leq \varphi \leq \alpha$  vorgegebenen Anfangsbedingungen durch ungerade bzw. gerade periodische Fortsetzung mit der Periode  $2\alpha$  auf die ganze Riemannsche Fläche des Logarithmus ausgedehnt werden, lassen sich die in der vorstehend referierten Note des Verf. erhaltenen Ergebnisse anwenden.

Schmidt (Köthen).

**Germay, R.-H.-J.: Sur une équation intégral-différentielle et sur une généralisation d'un théorème de Lindelöf.** Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 1, 233—238 (1932).

Mit sukzessiver Approximation wird bewiesen: Setzt man

$$u_r = \int_{x_0}^x f_r(x, s, y(r)) ds, \quad (r = 1, 2, \dots, p)$$

so hat die Integrodifferentialgleichung von Volterraschem Typ  $y' = F(x, y; u_1, u_2, \dots, u_p)$  im Intervall  $(x_0, x_0 + h)$  bei genügend kleinem  $h$  genau eine Lösung, die für  $x = x_0$  einen bestimmten Wert  $y_0$  annimmt, wenn in einem gewissen Wertebereich um  $x_0, y_0$  und  $u_r = 0$  herum  $F$  und alle  $f_r$  stetige Funktionen sind, die in bezug auf  $y$  und die  $u_r$  einer Lipschitzbedingung genügen.

R. Iglisch (Aachen).

### Variationsrechnung:

**Cinquini, Silvio: Condizioni sufficienti per la semicontinuità nel calcolo delle variazioni.** Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 2, 41—58 (1933).

This paper supplements one by Tonelli [Acta Math. 53, 325—346 (1929)] by giving three sets of sufficient conditions for the semi-continuity at a fixed surface of a double integral  $I = \iint f(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y)) dx dy$ .

These conditions are, as one would expect, somewhat weaker than those given by Tonelli for semi-continuity at all surfaces.

L. M. Graves (Chicago).

**Tonelli, Leonida: L'estremo assoluto degli integrali doppi.** Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 2, 89—130 (1933).

This paper gives a series of eight very general existence theorems for the absolute minimum of a double integral  $I = \int_D F(x, y, z, p, q) dx dy$



in certain classes of absolutely continuous functions. A function  $z(x, y)$  defined on a bounded open region  $D$  is absolutely continuous according to Tonelli in case: 1) it is continuous on  $D$ ; 2) for almost all  $x_0$  and almost all  $y_0$ ,  $z(x_0, y)$  and  $z(x, y_0)$  respectively are absolutely continuous in the ordinary sense on each interval of their ranges of definition; 3) the partial derivatives  $z_x = p$ ,  $z_y = q$ , are summable on  $D$ . A preliminary section is devoted to sufficient conditions for classes of absolutely continuous functions  $z(x, y)$  to be equally continuous. The integrand function  $F(x, y, z, p, q)$  and its partial derivatives  $F_p, F_q$ , are supposed to be continuous for all  $(x, y)$  in the fixed open domain  $D$  of integration, and for all  $z, p, q$ . A function  $\theta(x, y)$  defined on  $D$  is called a function of accumulation in the interior of  $D$  of a class  $[z(x, y)]$  in case  $\theta$  is a function of accumulation of the class on every closed point set  $E$  interior to  $D$ . A corresponding definition is given for classes bounded in the interior of  $D$ . A class of absolutely continuous functions containing all its functions of accumulation in the interior of  $D$  for which the integral  $I$  exists, is said to be complete in the interior of  $D$ , and is denoted by  $\mathfrak{C}_{(i)}$ . Classes of functions complete in  $D$  in the ordinary sense are denoted by  $\mathfrak{C}$ . Consider the inequalities:

- (A)  $E(x, y, z, p_0, q_0, p, q) \equiv F(x, y, z, p, q) - F(x, y, z, p_0, q_0) - (p - p_0)F_p(x, y, z, p_0, q_0) - (q - q_0)F_q(x, y, z, p_0, q_0) \geq 0$ ;
- (B)  $F(x, y, z, p, q) > \mu \{|p|^\alpha + |q|^\alpha\} + N \quad (\mu > 0, \alpha > 2)$ ;
- (C)  $F(x, y, z, p, q) > \mu(p^2 + q^2) + N \quad (\mu > 0)$ ;
- (D) there exists a function  $\theta(x, y)$  such that
- $$F_z(x, y, z, \theta_x, \theta_y) \equiv 0, \quad F(x, y, z, \theta_x, \theta_y) \leq F(x, y, z, p, q);$$
- (E)  $F(x, y, z, p, q) > \mu \{|p|^\alpha + |q|^\alpha\} + N \quad (\mu > 0, \alpha > 1)$ .

Then (neglecting certain conditions of regularity on the frontier  $\mathfrak{F}$  of  $D$ , which appear in some of the theorems) Tonelli's principal results may be summarized as follows. In case inequalities (A) and (B) hold (for all  $(x, y, z, p, q)$ ), then the integral  $I$  has a minimum in every class  $\mathfrak{C}_{(i)}$  bounded in the interior of  $D$ ; and also in every class  $\mathfrak{C}$  made up of functions continuous on the closure  $\bar{D}$  of  $D$ , and bounded on the frontier  $\mathfrak{F}$  of  $D$ . In case the inequalities (A), (C), and (D) hold, then the integral  $I$  has a minimum in each class  $\tilde{C}$  consisting of all functions  $z(x, y)$  continuous on  $\bar{D}$ , absolutely continuous on  $D$ , taking fixed boundary values on  $\mathfrak{F}$ , and giving the integral a finite value. Finally, suppose that inequalities (A) and (E) are satisfied, and that on every class of the type  $\tilde{C}$  corresponding to a sufficiently small sub-region  $D'$  of  $D$ , the integral  $I$  has a minimum, the minimizing function being a uniquely defined continuous functional of the boundary values. Then the integral  $I$  has a minimum on every class  $\tilde{C}$  corresponding to the region  $D$ .  
L. M. Graves (Chicago).

### Funktionentheorie:

**Leau, L.:** Sur les suites convergentes de fonctions holomorphes. (55. sess., Nancy, 20. VII. 1931.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 48—50 (1931).

**Jacob, Caius:** Sur un problème mixte dans l'anneau circulaire. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 91—93 (1933).

Die Aufgabe, eine in einem Kreisringe (evtl. mehrdeutige) bis auf endlich viele Pole analytische Funktion  $f(z)$  zu finden, deren Realteil auf  $n$  Randbögen und deren Imaginärteil auf den anderen Randbögen vorgeschrieben ist, ist unter gewissen Annahmen lösbar (Demtchenko, C. R. Acad. Sci., Paris 192, 141; dies. Zbl. 1, 19). Die Lösung ist nicht notwendig eindeutig bestimmt. Unter gewissen Annahmen über den Charakter der Mehrdeutigkeit von  $f(z)$  und über das Wachstum der Funktion am Rande, wird die allgemeinste Lösung angegeben, wenn eine spezielle Lösung bekannt ist.  
S. Warschawski (Göttingen).

**Takeya, Sôichi:** On the star-shaped representation of an analytic function. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A 1, 237—240 (1932).

Démonstration élémentaire du théorème suivant: si la fonction

$$f(z) = z + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots + a_n z^n + \dots$$

est régulière pour  $|z| < 2M$ , ( $M \geq 1$ ), et si l'on a  $|f'(z)| \leq M$  dans ce même cercle, le cercle unité  $|z| < 1$  est représenté sur un domaine étoilé par rapport à l'origine par  $f(z)$  et ses sections polynomiales. — Ce théorème énoncé par Takahashi avec l'hypothèse que  $f(z)$  était univalente dans le cercle unité, avait été démontré ensuite sans cette hypothèse par Tannaka [Tôhoku Math. J. 35 (1932); ce Zbl. 3, 403]. Voir aussi la note de Noshiro (ce Zbl. 5, 251).

E. Blanc (Poitiers).

**Fedoroff, V. S.:** Sur une propriété caractéristique des fonctions monogènes. Rec. math. Soc. math. Moscou 39, Nr 1/2, 5—14 u. franz. Zusammenfassung 14 (1932) [Russisch].

The following theorem is proved: Let  $f(z)$  be integrable over a bounded open domain  $D$  of the complex  $z$ -plane. Let  $K$  be a circle situated in  $D$ , whose center  $z$  and radius  $R$  are otherwise arbitrary. The condition (A)  $\int_K \zeta f(\zeta) d\omega = z \int_K f(\zeta) d\omega$ , no matter what is  $K$ , where the integration is extended over the area of  $K$ , is necessary and sufficient in order that  $f(z)$  should be equivalent to a function analytic in  $D$ . This condition can also be replaced by the equivalent condition (A').  $\int_0^{2\pi} (\zeta - z) f(\zeta) R d\theta = 0$ ,  $\zeta = z + R e^{i\theta}$ . The proof is based upon the well known property (C)  $f(z) = (\pi R^2)^{-1} \int_K f(\zeta) d\omega$  which is necessary and sufficient in order that  $f(z) = u(z) + iv(z)$ , where  $u$  and  $v$  are harmonic.

J. D. Tamarkin (Providence).

**Leja, F.:** Sur une propriété des suites des fonctions analytiques bornées sur une courbe. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 321—324 (1933).

Soit (1)  $f_n(z)$  une suite de fonctions holomorphes autour de  $z_0$ . La borne supérieure des quantités positives  $l$  telles que la suite  $f_n(z) l^n$  converge uniformément dans un voisinage de  $z_0$ , est dite facteur de convergence de (1). L'auteur indique quelques propriétés de ce facteur. Ainsi, par exemple, si la suite (1) est bornée presque partout sur un arc aboutissant au point  $z_0$ , alors on a soit  $\lambda_{z_0} = 0$ , soit  $\lambda_{z_0} \geq 1$ .

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

**Dubbeld, A. J. J.:** Über die kanonische Darstellung meromorpher Funktionen endlicher Ordnung. Nieuw Arch. Wiskde 17, 293—296 (1932).

Die Nevanlinnasche Herleitung der kanonischen Darstellung wird im Falle des Geschlechts Null angeblich vereinfacht. Hierzu ist jedoch zu bemerken, daß auch der Beweis von Nevanlinna in diesem einfachen Sonderfall auf eine ziemlich einfache Form gebracht werden kann.

L. Ahlfors (Åbo).

**Coble, Arthur B.:** Hyperelliptic functions and irrational binary invariants. II. Amer. J. Math. 55, 1—21 (1933).

Weiterführung und Ergänzung der Untersuchungen des ersten Teils (vgl. dies. Zbl. 4, 390) im Falle  $p = 3$ .

Myrberg (Helsinki).

### Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

**Khintchine, A.:** Sur les classes d'événements équivalents. Rec. math. Soc. math. Moscou 39, Nr 3, 40—42 (1932).

Der Verf. gibt einen neuen Ausgangspunkt an, welcher eine bedeutende Vereinfachung in der Behandlung der sog. „äquivalenten Ereignisse“ [die vom Ref. in den „Mem. R. Acc. Lincei“ VI. s. 4 (1930) eingeführt worden sind] gestattet. Die Ereignisse einer gewissen Klasse heißen äquivalent, falls die Wahrscheinlichkeit des Produktes (des gleichzeitigen Eintreffens) von  $n$  dieser Ereignisse bloß von  $n$  abhängt



(d. h. unabhängig von der speziellen Wahl des  $n$ -tupels). Bezeichnet man die in Rede stehende Wahrscheinlichkeit mit  $\omega_n$ , so ist die Wahrscheinlichkeit  $\omega_r^{(n)}$ , daß genau  $r$  unter diesen  $n$  Ereignissen eintreffen, gegeben durch die Formel:

$$\omega_r^{(n)} = \binom{n}{r} \left[ \omega_r - \binom{s}{1} \omega_{r+1} + \binom{s}{2} \omega_{r+2} - \cdots + (-1)^s \omega_{r+s} \right]. \quad (s = n - r)$$

Auf Grund dieser Formel erzielt Khintchine auf einem viel einfacheren Wege mehrere Resultate, zu welchen der Ref. durch die Anwendung der charakteristischen Funktion gelangt ist.

Bruno de Finetti (Trieste).

**Hoyt, Ray S.:** Probability theory and telephone transmission engineering. Bell Syst. Techn. J. **12**, 35—75 (1933).

Kurven- und tabellenmäßige Darstellung der Wahrscheinlichkeit, daß  $U^2 + V^2 > R^2$  ist, zu der zweidimensionalen Gaußschen Ausgangswahrscheinlichkeitsdichte  $\frac{1}{\pi \sqrt{1-b^2}}$

$\exp\left(-\frac{U^2}{1+b} - \frac{V^2}{1-b}\right)$  für zahlreiche Werte  $R$  und  $b$ . Mit Rücksicht auf die Anwendungen — z. B. auf die Unregelmäßigkeiten mit Spulen belasteter Telephonkabel — wird  $U + iV$  zu einer komplexen unabhängigen Veränderlichen zusammengefaßt, und es werden die Sätze über Addition von Mittelwerten und Streuungen für zweidimensionale Verteilungen in komplexer Schreibweise formuliert. Cauer (Göttingen).

**Tinbergen, J.:** L'utilisation des équations fonctionnelles et des nombres complexes dans les recherches économiques. Econometrica **1**, 36—51 (1933).

Zur Erklärung der beobachteten periodischen Preisschwankungen gewisser Waren hat man den Umstand herangezogen, daß das Angebot einer Ware im Zeitpunkt  $t$  vom Preis zur Zeit  $t - \theta$  abhängt, wobei  $\theta$  die Herstellungsdauer der Ware bezeichnet. Je nach den Annahmen, die man über die Abhängigkeit vom Preis der angebotenen und nachgefragten Warenmengen macht, wird man auf einfache lineare oder nicht lineare Differenzen-Differentialgleichungen für den Preis als Funktion der Zeit geführt. Die Lösungen dieser Gleichungen sind im allgemeinen oszillierend. Jedoch können die Amplituden mit der Zeit gegen Unendlich zu- oder gegen Null abnehmen. Verf. sucht durch Fourierreihen-Ansatz die evtl. vorhandenen periodischen Lösungen und gibt für die längste mögliche Periode einfache von  $\theta$  abhängende Schranken an. [Im linearen Fall sind auf Grund sehr allgemeiner Sätze von Bochner, Math. Ann. **102**, 489—504 (1929), **103**, 588—597 (1930), **104**, 579—587 (1931); dies. Zbl. **1**, 275, alle beschränkten und gleichmäßig stetigen Lösungen fastperiodisch. Ref.] W. Fenchel (Göttingen).

● **Sainte-Laguë, A.:** Probabilités et morphologie. (Actualités scient. et industr. Nr. 36. Exposés de morphol. dynamique et de mécanique du mouvement. Publiés de A. Magnan. II.) Paris: Hermann & Cie. 1932. 31 S. u. 7 Fig. Fres. 6.—.

**Srinivasiengar, C. N.:** Remarks on spurious correlation. J. Indian Math. Soc. **19**, 251—252 (1932).

**Darmois, G.:** Détermination de la moyenne et de la dispersion dans le cas des épreuves dépendantes. (55. sess., Nancy, 20. VII. 1931.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 34—37 (1931).

## Numerische und graphische Methoden.

**Ravigneaux, Pol:** Sur un nouvel appareil de calcul avec échelles logarithmiques. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 96—97 (1933).

Es wird erörtert, wie man einen Apparat bauen kann, der das Produkt zweier Größen direkt anzeigt. Eine praktische Ausführungsform wird nicht angegeben.

G. Koehler (Erfurt).

**Luekey, P.:** Nomogramme für die komplexen Wurzeln quadratischer und reduzierter kubischer Gleichungen. Z. angew. Math. Mech. **13**, 36—42 (1933).

**De la Vallée Poussin, C.:** Sur la résolution de l'équation de Gauss  $\sin(z - q) = \lambda \sin^4 z$ . Ann. Soc. Sci. Bruxelles A **52**, 306—313 (1932).

**Lusin, N.:** Sur certaines propriétés du multiplicateur inversant dans le procédé de Mr. A. Krylov. I. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 5, 595—638 (1932) [Russisch].

Continuation of the former investigations (see this Zbl. 4, 49) on A. Krylov's method of solving secular equation (see this Zbl. 2, 291). Let  $A$  and  $B$  be two arbitrary matrices  $(a_{ik})$ ,  $(b_{ik})$ , the determinant  $|B| \neq 0$ . Let  $A^* = B^{-1}AB$  and

$$M = \begin{vmatrix} a & \dots & f \\ a_1 & \dots & f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1} & \dots & f_{k-1} \end{vmatrix}; \quad M^* = \begin{vmatrix} a^* & \dots & f^* \\ a_1^* & \dots & f_1^* \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1}^* & \dots & f_{k-1}^* \end{vmatrix}$$

be Krylov's transferring multipliers for  $A$  and  $A^*$  matrices [ $a \dots f$ ,  $a^* \dots f^*$  being any given constants; each consecutive line in  $M$  and  $M^*$  being derived from the preceding by the same substitution  $A'$  (for  $M$ ) and  $A^{*'} (for  $M^*$ )]. Then it can be shown that  $M^* = |B| \cdot M$ . In order to study transferring multiplier for  $A$  it seems necessary to take such a transformed matrix  $A^*$ , for which  $M^*$  would be as simple as possible. The author calculates  $M^*$  for  $A^*$ , then  $M$  for  $A$  and finds$

$$M = \frac{1}{|B|} (-1)^{\frac{1}{2}(k^2 - e_1^2 - \dots - e_m^2)} \cdot L_1^{e_1} L_2^{e_2} \dots L_m^{e_m} \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)^{e_1 e_2} (\lambda_1 - \lambda_3)^{e_1 e_3} \dots (\lambda_1 - \lambda_m)^{e_1 e_m} \\ \cdot (\lambda_2 - \lambda_3)^{e_2 e_3} \dots (\lambda_2 - \lambda_m)^{e_2 e_m} \dots (\lambda_{m-1} - \lambda_m)^{e_{m-1} e_m}.$$

$L_i$  being linear forms of  $a \dots f$ ,  $\lambda_i$  roots of the secular equation,  $e_i$  whole simple numbers such as  $e_1 + \dots + e_m = k$ . Thus  $M$  has the following property. It is a product of  $k$  linear forms  $L_i$ , none of which can vanish identically. If the roots of secular equation —  $\lambda_i$  — are real, all the  $L_i$  are real. — The author gives further the rigorous proof that all roots of algebraic equation  $D(\lambda) = 0$  (obtained after substitution  $x^{(p)} = \lambda^p$  in Krylov's differential equation) actually are the roots of secular equation  $A(\lambda) = 0$ . He analyses the case when Krylov's transformed secular determinant vanishes identically (Krylov has given special rule for this very case). This rule is demonstrated and its geometrical interpretation given.

B. P. Gerasimovič (Charkow).

**Colomb, J.:** Sur le planimètre d'Amsler. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 93—95 (1933).

Es wird auf eine Arbeit von Resal [C. R. Acad. Sci., Paris 77, 509 (1873)] bezuggenommen, worin die Rollenabwicklung eines Planimeters beim Umfahren einer nicht geschlossenen Kurve mit dem Fahrstift behandelt wird. Verf. zeigt, daß sich das Ergebnis von Resal auf eine ganz einfache Form bringen läßt. G. Koehler (Erfurt).

**Burger, H. C., und P. H. van Cittert:** Wahre und scheinbare Intensitätsverteilung in Spektrallinien. Z. Physik 79, 722—730 (1932).

Die wahre Intensitätsverteilung der Spektrallinien wird aus einer linearen Integralgleichung bestimmt, deren Lösung eine Reihe von sukzessiven numerischen Integrationen erfordert. Um diese bequem ausführen zu können, haben die Verff. einen optischen Integrator konstruiert, dessen Grundidee im wesentlichen mit derjenigen des Grayschen Integrators (dies. Zbl. 2, 46) übereinstimmt. Das Instrument, dessen Herstellung die Firma P. J. Kipp & Zonen in Delft übernommen hat, wird auch bei anderen Problemen, die auf Integralgleichungen führen, von Bedeutung sein.

Nyström (Helsingfors).

**Angervo, J. M.:** Einige Vereinfachungen bei numerischer Quadratur und Differentiation. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 42, 144—159 (1932).

Nach einigen Betrachtungen über die Interpolationsformeln von Stirling und Bessel sowie den aus denselben abgeleiteten Formeln für numerische Integration und Differentiation transformiert Angervo die letzteren Formeln so, daß statt der gewöhnlichen Differenzen gewisse direkt und leicht aus den benutzten Funktionswerten zu bildende Größen auftreten. A. bestimmt die Koeffizienten im Falle unendlich vieler Funktionswerte und zeigt die Anwendbarkeit seiner Formeln an einem analytischen Beispiel. Er vermutet, daß sie auch praktische Bedeutung finden können.

Nyström (Helsingfors).



**Orlov, Michel:** Sur l'évaluation approchée des intégrales doubles. J. Cycle math. 2, 39—46 u. dtsh. Zusammenfassung 46 (1932) [Ukrainisch].

**Steffensen, J. F.:** Das Restglied der Cotesschen Formel zur numerischen Integration. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 42, 141—143 (1932).

Die von H. Kneser im Jber. Deutsch. Math.-Verein. 42, 27—32 (dies. Zbl. 5, 214) bewiesene Eigenschaft eines Zahlenfaktors in der Cotesschen Integrationsformel wird mit einfacheren Mitteln hergeleitet, und auch der Fall wird berücksichtigt, wo in dieser Formel eine gerade Anzahl von Funktionswerten auftritt. Nyström (Helsingfors).

**Mises, R. v.:** Zur meechanischen Quadratur. (Inst. f. Angew. Math., Univ. Berlin.) Z. angew. Math. Mech. 13, 53—56 (1933).

**Fairelough, N.:** Numerical integration of Emden's polytropic equation of index three. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 93, 40—49 (1932).

● **Meissner, E.:** Graphische Analysis vermittelt des Linienbildes einer Funktion. Sonderdruck aus: Schweiz. Bauztg u. Zürich: Verl. d. Schweiz. Bauztg 1932. 60 S. u. 47 Abb. RM. 3.20.

Das von dem Verf. schon früher veröffentlichte, vom Praktiker geschätzte Verfahren zur graphischen Behandlung totaler Diff. Gl. wird hier noch einmal mit vielen Erweiterungen und Beispielen dargestellt. Es handelt sich um Fälle, die auf anderem Wege schwer oder gar nicht zu behandeln sind. Die Funktion  $p(u)$  wird graphisch durch ein „Linienbild“ folgender Art repräsentiert:  $e$  sei der im Anfangspunkt angetragene Einheitsvektor, der aus einer festen Anfangsrichtung durch Drehung um den Winkel  $u$  im Gegenzeigersinn hervorgeht. Durch den Endpunkt des Vektors  $p(u) \cdot e$  wird eine zu  $e$  normale orientierte Gerade  $g_u$  gelegt. Ihre Richtung entsteht aus der  $e$ -Richtung durch Schwenkung um  $90^\circ$  im Gegenzeigersinn. Die Gesamtheit dieser Geraden  $g_u$  bildet das Linienbild. Das Linienbild von  $p'(u)$  wird die Evolute des zuerst gezeichneten Linienbildes. — Der Stoff ist folgendermaßen aufgeteilt: Graphische Differentiation und Integration. Totale Diff. Gleichungen 1. und 2. Ordn. Konstr. des Linienbildes ganzer rat. Funktionen. Die harmonische Funktion  $a \cos u + b \sin u$  (Beispiele: Elast. Schwingungen eines Massenpunktes bei konst. Reibung, Stöße eines Pendels gegen eine elast. Wand). Erzwungene Schwingung. (Biegung eines halbkreisförmigen Stabes.) Erzwungene Schwingungen bei periodischer Störung. Theorie der Resonanz. Fourier-Analyse. Die Diff. Gleichungen  $p''(u) = p(u)$  und  $p'' + p \sin u = 0$ . Die genaue Pendelgleichung. Bahnkurve des sphärischen Pendels. Rollbewegung eines Zylinders auf ebener Unterlage. — Die Konstruktionen sind in übersichtlichen Zeichnungen ausgeführt. F. Rehbock (Bonn).

**Fischer, Alexander:** Über das allgemeine „Integralrelief“ zur nomographisch-graphischen Lösung von Randwertaufgaben gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung — das reelle Gegenstück zum „Sinusrelief und Tangensrelief in der Elektrotechnik“ von Fritz Emde. Hauptvers. Deutsch. Ing. Tschechoslowak. Republ., Mitt. 22, 7—11 (1933).

Die Darstellung erfolgt in der Weise, daß die abhängige und unabhängige Veränderliche in einem Kurvennetz kotiert werden, so daß die einer partikulären Lösung zugehörigen Wertepaare längs einer Geraden abgelesen werden können, während die Werte der Integrationskonstanten längs zweier fester paralleler Leiter abzulesen sind. Die Arbeit enthält ferner Andeutungen über Verallgemeinerungen sowie eine nomographische Darstellung der Lösung einer linearen inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung. Funk (Prag).

**Bernstein, F.:** Neuer Galtonapparat zur Durchführung einer praktischen Lösung der Randwertaufgaben der partiellen Differentialgleichungen  $\Delta u = 0$  und  $\Delta u = c$  mit besonderer Berücksichtigung des Torsionsproblems. Z. Physik 79, 684—695 (1932).

In der vorliegenden Arbeit wird ein neuer Apparat angegeben, mit dem die numerische Lösung der Randwertaufgaben von partiellen Differenzengleichungen gewonnen werden kann, die den Differentialgleichungen  $\Delta u = 0$  bzw.  $\Delta u = c$  entsprechen. Der Apparat besteht aus zwei in einzelne Fächer aufgeteilten Kästen, die mit ihrer offenen Seite so aufeinandergesetzt sind, daß über jedes Fach des einen Kastens mehrere Fächer des anderen Kastens zu liegen kommen. Man füllt in das eine System irgendein feinkörniges Material ein, derart, daß in den Randfächern eine bestimmte vorgeschriebene Höhe eintritt, kippt den Apparat zunächst um  $180^\circ$  und sodann wiederum um  $180^\circ$  und

bringt durch Nachfüllen bzw. Ausfüllen das Material in den Randfächern wieder auf die alte Höhe. Bei Wiederholung dieses Prozesses nähert sich die Materialverteilung mehr und mehr der Lösung des Randwertproblems einer gewissen — der Differentialgleichung  $\Delta u = 0$  entsprechenden — Differenzgleichung. Die Verwendbarkeit des Apparates wird durch zwei Beispiele illustriert. *Lüneburg* (Göttingen).

● **Hayashi, Keiichi:** *Tafeln für die Differenzenrechnung sowie für die Hyperbel-, Besselschen, elliptischen und anderen Funktionen.* Berlin: Julius Springer 1933. VI, 66 S. RM. 12.—.

**Thompson, J. S.:** *The analysis of compound wave forms.* Philos. Mag., VII. s. 15, 1—15 (1933).

Es wird die Aufgabe behandelt, eine Kurve zu analysieren, die aus zwei Sinuslinien verschiedener Frequenz zusammengesetzt ist. Eine Einteilung dieser Kurven erfolgt nach ihrem Aussehen in drei Gruppen, für jede dieser Gruppen wird gezeigt, wie man mittels leicht an dem Kurvenbild bestimmbarer Größen die Summe und Differenz der beiden Frequenzen und Amplituden ermitteln kann. *G. Köhler.*

**Feinberg, R.:** *Bemerkung zu der Arbeit von G. Köhler und A. Walther: Über die Fouriersche Analyse von Funktionen mit Sprüngen, Ecken und ähnlichen Besonderheiten.* Arch. Elektrotechn. 27, 15—18 (1933).

Es wird darauf hingewiesen, daß bei dem von G. Köhler und A. Walther mitgeteilten Verfahren zur Fourierschen Analyse (vgl. dies. Zbl. 3, 66) Reihen auftreten, deren Konvergenz offensteht und an Beispielen gezeigt, daß für gewisse Fourierkoeffizienten tatsächlich Divergenz eintreten kann. Ferner wird ein graphisches Verfahren zur Fourieranalyse angegeben. *Pingitzer* (Wien).

**Walther, A.:** *Stellungnahme zu der Bemerkung von Herrn Feinberg und geschichtliche Ergänzung zur Fourierschen Analyse von Funktionen mit Sprüngen, Ecken und ähnlichen Besonderheiten.* Arch. Elektrotechn. 27, 19—20 (1933).

Der Einwand von R. Feinberg wird durch Anführung des Satzes entkräftet, daß die Fourierkoeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  einer stückweise stetigen Funktion reguläre analytische Funktionen von  $n$  sind. Es genügt also, die Konvergenz der zur Bestimmung von  $a_n$  und  $b_n$  dienenden Reihen für gewisse  $n$  nachzuweisen, um die aus ihnen abgeleiteten Ausdrücke für alle  $n$  verwenden zu können. Zur Geschichte des Verfahrens werden noch genauere Angaben gemacht. *Pingitzer* (Wien).

**Stephan, Frederiek F.:** *Summation methods in fitting parabolic curves.* J. Amer. Statist. Assoc. 27, 413—423 (1932).

Die ursprünglich von Tschebysheff (Collected Work I, 701—702), später jedoch von vielen anderen (darunter Gram, Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. 10, 3—23) wiedergefundene Methode zur Ausgleichung einer Zahlenreihe nach algebraischen Orthogonalfunktionen wird mehr und mehr benutzt. Verf. gibt ein Rechenschema, bei dem relativ schnell ausführbare Rechnungen (meistens Summationen) zur Anwendung gelangen. Die Formeln reichen bis zum 5. Grad. Sie werden auf ein numerisches Beispiel angewandt. Für Literaturhinweise siehe Isserlis, Biometrika 19, 87 und 93. *Burrau* (Kopenhagen).

**Lagunow, B.:** *Orthogonale lineare Funktionen in der Methode der kleinsten Quadrate.* J. Cycle math. 2, 79—81 u. dtsch. Zusammenfassung 82 (1932) [Ukrainisch].

## Geometrie.

**Cairns, Stewart S.:** *An axiomatic basis for plane geometry.* Trans. Amer. Math. Soc. 35, 234—244 (1933).

Hilbert hat im Anhang IV seiner „Grundlagen der Geometrie“ [Teubner. 7. Auflage. (1930) 178—230] eine hauptsächlich mit den Begriffen der Punktmengentheorie operierende Kennzeichnung der ebenen euklidischen und nichteuklidischen Bewegungsgruppen durch 3 sehr einfache Axiome gegeben. Verf. erreicht eine wesentliche Ver-



einfachung der Hilbertschen Beweisverfahren, indem er von vornherein auf die Kennzeichnung der gesamten, auch die spiegelbildlichen Transformationen enthaltende Gruppe der kongruenten Abbildungen ausgeht. Während das erste Hilbertsche Axiom beibehalten, und das dritte abgeschwächt wird, wird das zweite Hilbertsche Axiom „Jeder wahre Kreis besteht aus unendlich vielen Punkten“ durch das ganz andere: „Zu zwei Punkten  $A$  und  $B$  existiert stets eine diese festlassende Spiegelung“, ersetzt.  
Thomsen (Rostock).

**Longhi, Ambrogio:** Sulla geometria numerativa del triangolo. Boll. Un. Mat. Ital. 12, 5—7 (1933).

**Clapier, C.:** Sur les propriétés de l'orthopole. (55. sess., Nancy, 20. VII. 1931.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 31—34 (1931).

**Coxeter, H. S. M.:** The densities of the regular polytopes. III. (Non-Euclidean polytopes.) Proc. Cambridge Philos. Soc. 29, 1—22 (1933).

Für beliebige  $k_1, \dots, k_{m-1}$  wird das Schläflische Symbol  $\{k_1, \dots, k_{m-1}\}$  untersucht (siehe dies. Zbl. 1, 288 u. 5, 369), indem man das Polytop auf die umschriebene Hyperkugel projiziert. Definiert das Symbol im üblichen Sinne kein Polytop, so kann man ihm umgekehrt, falls die  $k_i$  ganze Zahlen sind, durch eine Einteilung des Lobatschewskyschen Raumes ein solches zuordnen, dieses kann man sich in einem Raum mit räumlicher und zeitlicher Ausdehnung gelegen denken. Falls einige der  $k_i$  gebrochene Zahlen sind, so ist nur das durch das Symbol  $\{3, \dots, 3, p, p/2, p, 3, \dots, 3\}$  ( $p=5, 7, 9, \dots$ ), wo  $p/2$  an  $n$ -ter Stelle stehen möge, dargestellte Polytop von endlicher Art, und zwar ist seine Art gerade ( $\frac{m}{n}$ ). Die Sternpolytope im Minkowskischen Raume werden aufgezählt.  
J. J. Burckhardt (Zürich).

**Yamanouti, Masanori:** Notes on closed convex figures. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 14, 605—609 (1932).

Es wird die folgende Extremumaufgabe behandelt: Unter den ebenen konvexen Bereichen mit gegebenem Umfang  $L$  und gegebener Dicke  $\Delta \leq \pi L$  wird derjenige mit kleinstem Flächeninhalt gesucht. Ist  $L \geq 2\sqrt{3}\Delta$ , so ergibt sich das gleichschenklige Dreieck mit dem Umfang  $L$  und zwei Höhen der Länge  $\Delta$ . Mit Hilfe der Bemerkung, daß der Flächeninhalt eines konvexen Bereichs  $\geq Lr/2$  ist, wo  $r$  den Inkreisradius bezeichnet und wo das Gleichheitszeichen u. a. für das Dreieck steht, wird die obige Aufgabe auf die folgende elementare zurückgeführt: Unter allen Dreiecken gegebenen Umfangs und gegebener Dicke ist das mit kleinstem Inkreisradius zu bestimmen. — Ist  $L < 2\sqrt{3}\Delta$ , so existiert kein gleichschenkliges Dreieck der oben angegebenen Art. Über die Lösung in diesem Fall wird eine Vermutung ausgesprochen. — Das Ergebnis des Verf. liefert zugleich eine Verschärfung einer Ungleichung von Favard und Kawai (vgl. dies. Zbl. 5, 177) zwischen  $L$ ,  $\Delta$  und dem Flächeninhalt eines konvexen Bereichs.

W. Fenchel (Göttingen).

**Lob, H.:** Some chains of theorems derived by successive projection. Proc. Cambridge Philos. Soc. 29, 45—51 (1933).

1. Die Kette der mit der Miquel-Cliffordschen Konfiguration der Ebene (vgl. z. B. Narasinga Rao, dies. Zbl. 5, 114) zusammenhängenden Sätze ist von P. White [Proc. Cambridge Philos. Soc. 22 (1925)] auf den  $R_n$  verallgemeinert worden. Die Kreise werden dabei durch Kurven ersetzt, die durch 2 feste Punkte laufen. Die Ableitung erfolgt durch eine elegante Projektionsmethode. Diese wird in der vorliegenden Arbeit verallgemeinert: Es werden Kurven durch mehr als zwei feste Punkte behandelt. Erster Schritt: Im  $R_4$  bestimmen die Ecken eines Tetraeders und drei weitere Punkte eine  $C^4$ . Projiziert man die Figur nacheinander von den 4 Tetraederecken auf einen  $R_3$ , so erhält man in  $R_3$  dem Tetraeder entsprechend ein vollständiges Vierseit, außerdem 3 Punkte und durch diese 3 Punkte 4  $C^3$ , von denen jede durch die Eckpunkte eines im Vierseit enthaltenen Dreiecks hindurchläuft. Diese 4  $C^3$  schneiden sich dann noch in einem vierten Punkte. — 2. Durch ein ähnliches Verfahren wird die Kette der Morley-

schen Sätze über die Mittelpunkte der mit einem Liniensystem in der Ebene verbundenen Kreise neu bewiesen. Erster Schritt: Im  $R_3$  bestimmen die Ecken eines Tetraeders und zwei weitere Punkte  $I, J$  eine  $C^3$ . Diese Figur wird nacheinander von den Ecken des Tetraeders auf eine Ebene durch  $I, J$  projiziert. Es entstehen ein vollständiges Vierseit und vier Kegelschnitte durch  $I, J$  und die Eckpunkte von je einem dem Vierseit angehörigen Dreieit. Die Pole der Geraden  $IJ$  in bezug auf diese Kegelschnitte gehören dann mit  $I, J$  einer Kurve 2. Ordnung an. *E. A. Weiss (Bonn).*

**Todd, J. A.:** Configurations defined by six lines in space of three dimensions. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **29**, 52—68 (1933).

Abbildung der Flächen 4. Ordnung durch 6 Geraden des  $R_3$  auf die Fläche ( $R_3$ ) eines  $R_4$ . Den Punkten des  $R_3$  werden hierbei die Punkte einer  $V_3^4$  mit 36 Doppelpunkten zugeordnet, welche auf 15 verschiedene Weisen projektiv erzeugt werden kann. Mit Hilfe der Abbildung wird u. a. der Satz bewiesen: Notwendig und hinreichend dafür, daß 7 Geraden einer  $F^4$  angehören, ist die Existenz einer rationalen Kurve  $C^{19}$ , welche 6 der Geraden in je 12 und die siebente Gerade in 10 Punkten schneidet. — Sonderfall der Abbildung, in dem die 6 Geraden einem linearen Komplex angehören.  $V_3^4$  zerfällt in eine doppeltzählende  $V_3^3$ . Der Ort der Geraden, die mit den 6 vorgegebenen auf einer  $F^4$  liegen, zerfällt in den linearen und einen kubischen Komplex.

*E. A. Weiss (Bonn).*

**Lagrange, René:** Sur le théorème de Poncelet. *C. R. Acad. Sci., Paris* **196**, 319—321 (1933).

$F_1$  bis  $F_{2n}$  seien Regelflächen 2. Grades einer Schar  $S$ , die ein nichtausgeartetes gemeinsames Polartetraeder  $T$  besitzt. Es wird untersucht, wann ein windschiefes Polygon sich schließt, dessen Seiten der Reihe nach auf den  $F_i$  liegen, während seine Ecken (von selbst) der Basiskurve  $B$  von  $S$  angehören. Diese Frage läßt sich nämlich auf das allgemeine ebene Ponceletsche Theorem zurückführen, indem man die Figur von den Ecken von  $T$  aus auf die Gegenebenen projiziert. Die Umrisse der  $F_i$  von den Ecken aus sind dann identisch mit den Schnitten dieser Flächen mit den Gegenebenen, bilden also je ein Kegelschnittbüschel.  $B$  liegt mit jeder Tetraederecke auf einem Kegel 2. Ordnung der zu  $S$  gehört, die Projektion von  $B$  auf die Gegenebene gibt also je einen Kegelschnitt des Büschels. Die Schenkel des windschiefen Polygons erscheinen in jeder der Projektionen als Tangenten der Umrisse der  $F_i$ , auf denen sie liegen, während die Bilder der Ecken auf dem Bildkegelschnitt von  $B$  liegen. — Enthält  $S$  eine Kugel, so erhält man eine merkwürdige Folgerung über ebene zyklische Kurven, indem man die Figur einer räumlichen Inversion unterwirft, die die Kugel in eine Ebene und  $B$  in eine zyklische ebene Kurve verwandelt.

*Cohn-Vossen (Köln).*

### Algebraische Geometrie:

**Lemoine, T.:** Lieux des centres des coniques circonscrites ou inscrites à un triangle et tangentes à une courbe algébrique quelconque. (55. sess., Nancy, 20. VII. 1931.) *Assoc. Franç. Avancement Sci.* 50—53 (1931).

**Mentré, Paul:** Sur les biquadratiques de première espèce. (55. sess., Nancy, 20. VII. 1931.) *Assoc. Franç. Avancement Sci.* 64—66 (1931).

**Villa, Mario:** Sopra una classe di superficie razionali rigate dello spazio a cinque dimensioni. *Boll. Un. Mat. Ital.* **12**, 15—18 (1933).

**Welchman, W. G.:** Planar threefolds in space of four dimensions. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **29**, 103—115 (1933).

Es wird eine  $\infty^1$  Ebenenschar vom Geschlecht  $p$  in einem vierdimensionalen Raume betrachtet. Für die  $V_3^n$ , die von den Ebenen der Schar überdeckt wird, bestimmt Verf. die Ordnungen der Doppelfläche  $F$  und der dreifachen Linie  $\Gamma$  (s. auch L. Roth, dieses Zbl. **3**, 70), die Anzahl der vierfachen Punkte, das Geschlecht von  $\Gamma$ , die Anzahl der Ebenenpaare der Schar, die in einem  $S_3$  liegen, die Anzahl der Ebenen der Schar, die  $\Gamma$  berühren, und die Anzahl der Punkte von  $\Gamma$ , von denen zwei zusammenfallende



Ebenen der Schar ausgehen. Die Beweise sind entweder unmittelbar oder auf das allgemeine Korrespondenzprinzip für Korrespondenzen mit Wertigkeit gestützt. Es folgt die Bestimmung der Anzahl der Brennpunkte der Ordnung  $\lambda$  für ein algebraisches  $\infty^1$ -System von  $S_{2\lambda-1}$  in einem Raume  $S_{2\lambda+1}$ . Am Ende einige Beispiele rationaler  $\infty^1$ -Ebenenscharen 3., 4., 5. Ordnung im  $S_4$ .  
*E. G. Togliatti (Genova).*

**Enriques, F.: Intorno ad alcune serie invarianti di gruppi di punti sopra una superficie algebrica.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 533–540 (1932).

Zu jedem Netz von Kurven  $C$  vom Geschlechte  $\pi$  auf einer algebraischen Fläche vom numerischen Geschlechte  $p$  wird eine Punktgruppe  $C_\chi$  definiert, bestehend aus den  $24(\pi + p)$  Spitzen von Netzkurven. Es wird bewiesen, daß die Äquivalenzschar  $S_e$  der (virtuellen) Punktgruppen  $C_\chi - 12(CC')$  von der Wahl des Netzes  $|C|$  unabhängig und absolut-invariant ist. Dabei ist  $(CC')$  eine kanonische Punktgruppe von  $C$ . Der Grad der Schar  $S_e$  ist  $p + 1$ . Zwischen der von Severi [Mem Accad. Ital. 3 (1932)] definierten „kanonischen Schar“  $S_s$ , der Schar  $S_e$  der Schnittgruppen zweier kanonischen Kurven und der eben definierten Schar  $S_e$  besteht die Relation  $S_e = 2(S_s + S_c)$ . Für den Fall der Ebene und der allgemeinen Fläche 4. Ordnung wird die Schar  $S_e$  wirklich bestimmt.  
*van der Waerden (Leipzig).*

**Comessatti, A.: Sulla serie canonica d'una superficie algebrica.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 555–560 (1932).

Die von Severi eingeführte kanonische Schar von Punktgruppen vom Grade  $I + 4$  auf einer algebraischen Fläche kann, wie der Autor beweist, auch definiert werden als die charakteristische Schar der Mannigfaltigkeit  $\Omega$  der koinzidenten Punktepaare in der Mannigfaltigkeit  $V$  aller geordneten Punktepaare der Fläche  $F$ , d. h. als die Schar der virtuellen Schnittpunktgruppen  $(\Omega, \Omega)$  von  $\Omega$  mit sich selbst. Daraus ergibt sich sofort die Möglichkeit einer Definition der kanonischen Schar einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $V_n$  als  $(-1)^n(\Omega, \Omega)$ , wo  $\Omega$  analog wie im Fall der Fläche definiert wird. Die Ordnung dieser kanonischen Schar ist  $\nu = I_n + 2(-1)^n n$ . Für  $n = 1$  stimmt die Definition mit der klassischen, für  $n = 2$  mit der Severischen überein.  
*van der Waerden (Leipzig).*

**Vandenberghe, J.: Sur les systèmes linéaires triplement infinis, homographiques, de surfaces algébriques.** Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2, 9–11 (1933).

Etant donnés deux systèmes linéaires  $\infty^3$ , homographiques, de surfaces algébriques  $|F|$ ,  $|\Phi|$ , l'auteur établit l'équation du lieu du point de contact de deux surfaces homologues  $F$  et  $\Phi$  tangentes. Ce lieu est une surface d'ordre  $6(m+n) - 8$ ,  $m$  désignant l'ordre des surfaces  $F$ ,  $n$  celui des surfaces  $\Phi$ .  
*P. Dubreil (Lille).*

**Dubreil, P.: Sur les intersections totales mixtes dans l'espace à trois dimensions.** C. R. Acad. Sci., Paris 196, 84–86 (1933).

Verf. gibt die folgende von Enriques vermutete Erweiterung des Noetherschen Satzes: Wenn die Flächen  $F_1, F_2, F_3$  die Kurve  $C$   $r_1$ -,  $r_2$ - und  $r_3$ -fach enthalten und jeder Punkt  $M_i$  der Punkte  $M_1, \dots, M_k$  ein  $r_1^{(i)}$ -,  $r_2^{(i)}$ -,  $r_3^{(i)}$ -facher Punkt für  $F_1, F_2$  und  $F_3$  ist, so genügt es im einfachen Fall, damit eine Form  $F(x, y, z)$  in der Form

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + A_3 F_3$$

geschrieben werden kann, worin  $A_1, A_2, A_3$  Formen sind, daß die Fläche  $F = 0$  die Kurve  $C$  als  $(r_1 + r_2 + r_3 - 1)$ -fache Kurve enthält und jeder Punkt  $M_i$   $(r_1^{(i)} + r_2^{(i)} + r_3^{(i)} - 2)$ -facher Punkt von  $F = 0$  ist. — Es ist möglich, diesen Satz mit allgemeineren Sätzen in Verbindung zu bringen. Verf. bezeichnet mit  $q_P(a)$  die Primärkomponente des Ideals  $a$  für die irreduzible Varietät  $V$ .  $C_i$  ist die Kurve, welche die Flächen  $F_j$  und  $F_k$  außer  $C$  gemein haben. Verf. gibt einige Sätze, aus welchen, wenn  $C, C_1, C_2, C_3$  keinen Punkt gemein haben, dieser Satz folgt: Jede Form  $F$ , welche zu

$$q_C[(F_2 F_3, F_3 F_1, F_1 F_2)]$$

und zu  $q_{M_i}[(F_1, F_2, F_3)]$  ( $i = 1, \dots, k$ ) gehört, genügt einer Identität

$$F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2 + A_3 F_3$$

mit den Relationen  $A_i \subset q_C [(F_j, F_k)]$  für die  $A_i$ . Im einfachen Fall enthält dieser Satz den erstgenannten als speziellen Fall. Verf. betrachtet auch den Fall, daß  $C, C_1, C_2, C_3$  einen Punkt gemein haben. *G. Schaake* (Groningen).

**Cherubino, S.:** Ancora sulla classificazione delle superficie iperellittiche dal punto di vista reale. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 401—403 (1932).

Continuation d'une Note avec le même titre de celle-ci (cf. ce Zbl. 6, 26). *Segre*.

**Roth, L.:** Degenerate surfaces in higher space. Proc. Cambridge Philos. Soc. 29, 88—94 (1933).

Als Anwendung von Sätzen und Gedanken von O. Chisini [Rend. Acc. Lincei (5) 26<sub>1</sub>, 543 (1917)], studiert Verf. das Zerfallen der Enveloppe einer allgemeinen algebraischen Fläche  $\Phi$  eines  $S_r$ , im Falle, daß  $\Phi$ , durch Grenzübergang, in zwei Flächen  $F, F'$  mit einer gemeinsamen Kurve  $C$  zerfällt. *E. G. Togliatti* (Genova).

**Babbage, D. W.:** Rational normal octavic surfaces with a double line, in space of five dimensions. Proc. Cambridge Philos. Soc. 29, 95—102 (1933).

Beschreibung von vier rationalen normalen Flächen 8. Ordnung mit einer Doppelgeraden in einem Raume  $S_5$ ; alles ist auf die ebenen Abbildungen jener Flächen gestützt. Der Beweis, daß die vier behandelten Flächentypen die einzigen rationalen normalen  $F^8$  des  $S_5$  mit einer Doppelgeraden liefern, befriedigt nicht: z. B. (zu S. 96) ist es nicht wahr, daß jede elliptische ebene Kurve in eine Kurve 3. Ordnung mit einer Reihe quadratischer Verwandtschaften der Ebene verwandelt werden kann (s. Enriques e Chisini, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni, III, 190, Bologna 1924).

*E. G. Togliatti* (Genova).

### Differentialgeometrie:

● **Juvet, Gustave:** Leçons d'analyse vectorielle. I. Géométrie différentielle des courbes et des surfaces. Théorie mathématique des champs. Lausanne: F. Rouge & Cie. u. Paris: Gauthier-Villars & Cie. 1933. 120 S. u. 28 Fig.

**Mirguet, Jean:** Sur une classe de surfaces admettant un plan tangent continu. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2, 11—15 (1933).

Neuer Beweis des Satzes, daß, wenn in keinem Flächenpunkt der Schnitt der Paratingens mit einer Kugel um diesen Flächenpunkt innere Punkte besitzt, überall die Paratingens eben ist. (Vgl. dies. Zbl. 5, 262). Daraus folgt die Stetigkeit der Tangentialebene. *Willy Feller* (Kiel).

**Butchart, J. H.:** Helices in euclidean  $n$ -space. Amer. J. Math. 55, 126—130 (1933).

Der Vektor  $\gamma(s)$  bezeichne eine Kurve  $C$  im  $E_n$ .  $C$  heißt Schraube, wenn die Tangente einen konstanten Winkel mit einer festen Richtung einschließt. Dann wird bewiesen:  $C$  ist dann und nur dann eine Schraube, wenn die Matrix  $(\gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}, \dots, \gamma^{(n+1)})$  den Rang  $n - 1$  hat; dabei bedeuten die oberen Indizes Ableitungen nach  $s$ . Auch der Fall, daß jene Matrix noch geringeren Rang hat, wird geometrisch gedeutet. Be- weise mit Hilfe des Frenetschen  $n$ -Kants. Man vergleiche die in diesem Zbl. 2, 155 besprochenen Arbeiten von Hayden. *Cohn-Vossen* (Köln).

**Hamid, Husny:** Sur la caractéristique du paraboloïde des normales à une surface réglée. (55. sess., Nancy, 20. VII. 1931.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 42—44 (1931).

**Douglas, Jesse:** Crescent-shaped minimal surfaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 19, 192—199 (1933).

Die Douglassche Arbeit über Minimalflächen durch zwei Jordankurven (vgl. dies. Zbl. 4, 154) setzt ausdrücklich voraus, daß diese keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Hier wird gerade der Fall erörtert, daß sie genau einen Punkt gemein haben; die Verwendung des bekannten Douglasschen Ansatzes liefert, wie vorausszusehen, die Existenz einer Minimalfläche, wenn es überhaupt Flächen gibt, die von den beiden Jordankurven berandet sind und einen kleineren Inhalt haben als die Summe der durch jede einzelne berandeten einfach zusammenhängenden Minimalflächen (kleinsten Inhalts); und zwar handelt es sich um Flächen vom topologischen Typus des zwischen zwei sich innen berührenden Kreisen gelegenen (ebenen) Gebiets. *Hans Lewy* (Göttingen).



**Terracini, Alessandro:** Sullo scarto dalla normalità delle congruenze rettilinee. Boll. Un. Mat. Ital. **12**, 7—12 (1933).

Si indica un modo per misurare di quanto una congruenza rettilinea, in un dato punto di un suo dato raggio, si scosti dall'essere normale. Lo scarto dalla normalità così definito resta strettamente collegato con la cosiddetta densità della congruenza. Si osserva un caso in cui il classico teorema di Malus-Dupin sulla conservazione, attraverso rifrazioni, della normalità di una congruenza si estende alla nozione qui introdotta.

*Autoreferat.*

**Godeaux, Lucien:** Les quadriques de Tzitzeica et la théorie des surfaces. Ann. Soc. Polon. math. **10**, 21—24 (1932).

Les tangentes asymptotiques d'une surface  $(x)$  sont représentées dans l'espace linéaire  $S_5$  par les points  $U, V$  qui déterminent une suite de Laplace  $\dots V_2, V_1, V, U, U_1, U_2, \dots$ . En coordonnées locales  $\xi_i, \eta_i$  (par rapport à l'octaèdre  $U_2 U_1 U V V_1 V_2$ ) les équations  $\xi \eta - 3h \xi_1 \eta_1 = 0, \xi_2 = 0, \eta_2 = 0$  déterminent les quadriques de Tzitzeica ( $h = h_1, h = k_1$  sont deux invariants de Darboux de la suite  $UV$ ). Elles appartiennent à l'espace  $U_1 U V V_1$  qui coupe l'hyperquadrique  $Q$  (l'image de droites de  $S_3$ ) suivant deux plans: l'un représente les droites du plan tangent de  $(x)$  au point  $x$ , l'autre — la gerbe de droites du sommet  $x$ . En chaque plan elles déterminent des coniques qui représentent: 1) les deux coniques situées dans le plan tangent de  $(x)$  et qui ont en commun avec la quadrique de Lie certains faisceaux des plans et deux cônes dont les sommets  $T_1, T_2$  appartiennent à la première directrice de Wilczynski et 2) les deux cônes qui par la voie analogue déterminent deux plans  $\tau_1$  et  $\tau_2$  — les plans polaires de  $T_1, T_2$  par rapport à la quadrique de Lie. Les plans  $\tau_1, \tau_2$  coïncident si la surface  $(x)$  est isothermo-asymptotique.

*S. Finikoff (Moscou).*

**Godeaux, Lucien:** Remarque sur certaines surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **2**, 2—5 (1933).

L'auteur poursuit (Bull. Ac. sci. Belg. **1928**, 158—186, 345—348, 455—466; ce Zbl. **6**, 28) l'étude des surfaces désignées au titre en examinant le cas de Terracini (Atti Soc. Mat. Modena **1919**) quand l'un des points caractéristiques (le point  $y'$ ) est fixe. La première directrice de Wilczynski passe par  $y$ ; la seconde se trouve dans un plan fixe contenant  $y$ . Elle engendre une congruence de Goursat. En représentant les droites de l'espace ordinaire  $S_3$  par les points de l'hyperquadrique  $Q$  de l'espace  $S_5$ , les tangentes asymptotiques d'une surface  $y$  déterminent une suite de Laplace. Le cas étudié est caractérisé par le fait que la suite en question s'arrête dans les deux sens et ne comprend que quatre termes.

*S. Finikoff (Moscou).*

**Weitzenböck, R.:** Über den Reduktionssatz bei affinem und projektivem Zusammenhang. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **35**, 1220—1229 (1932).

Eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $X_n$  mit der Gruppe  $P$  aller topologischen Abbildungen ist eine affin-zusammenhängende Mannigfaltigkeit  $A_n$ , wenn ein System von  $n^3$  Funktionen  $\Gamma_{ij}^k$  gegeben ist, das bei einer Transformation aus  $P$  vermöge folgender Gleichungen transformiert wird:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \bar{i} \partial \bar{j}} = \bar{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}} \frac{t}{\bar{k}} - \Gamma_{rs}^t \frac{r}{\bar{i}} \frac{s}{\bar{j}}. \quad \left( \frac{r}{\bar{i}} = \frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_i}, \text{ usw.} \right)$$

Für die Differentialinvarianten dieser  $A_n$  gegenüber der Gruppe  $P$  gilt folgender Reduktionssatz: Sie sind affine Invarianten von  $S_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$ , vom Krümmungstensor und deren kovarianten Ableitungen (Weitzenböck, Invariantentheorie). Es wird  $S_{ij}^k = 0$  gesetzt. Jetzt wird außerdem Invarianz gegenüber der Gruppe  $B$  der „bahntreuen“ Transformationen  $\hat{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \delta_i^k \psi_j + \delta_j^k \psi_i$

verlangt, wo  $\psi_i$  einen willkürlichen Vektor bedeutet. Elimination der  $\psi_i$  liefert nach T. Y. Thomas

$$\Pi_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \frac{1}{n+1} (\delta_i^k \Gamma_{hj}^h + \delta_j^k \Gamma_{hi}^h),$$

die „Komponenten eines projektiven Zusammenhanges“. Zur Bestimmung der Differentialinvarianten erster Ordnung erhält man den Weylschen projektiven Krümmungstensor. Mit Hilfe einer Tensordichte ist es möglich, aus dem projektiven Zusammenhang  $\Pi_{ij}^k$ , einen affinen  $T_{ij}^k$  herzuleiten. Im allgemeinen ist die Tensordichte aus den  $\Pi_{ij}^k$  aufzubauen, womit der Reduktionssatz hergestellt ist; einige Ausnahmefälle bleiben unerledigt.

Griss (Doetinchem).

**Takasu, Tsurusaburo: Differentialkugelgeometrie. III.** Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 21, 594—725 (1932).

Diese Abhandlung ist die unmittelbare Fortsetzung von Differentialkugelgeometrie I und II. [Sci. Rep. Tôhoku Univ. I. s. 17, 169—354 und 355—572 (1928)]. Das Ganze gibt eine ausführliche Behandlung der wichtigsten Gebiete der Differentialkugelgeometrie. — Teil III enthält erstens Ergänzungen zur konformen Flächen-theorie und Verallgemeinerungen früherer Methoden zur Behandlung derselben (z. B. Behandlung mit einem System von Tangentialkugeln, die ein Ribaucoursches System bilden), zweitens die Theorie der Flächen, die von einer Schar von Kreisen überstrichen werden. Letztere werden nach dem Muster eindimensionaler differentialgeometrischer Theorien behandelt und durch 5 natürliche Gleichungen beschrieben. Als wesentliches methodisches Hilfsmittel dienen die „instantanen absoluten Elemente“ des Verf. Der ihrer Verwendung zugrunde liegende Gedanke läßt sich am Beispiel der Theorie der Kreisscharen so illustrieren: Zu zwei unendlich benachbarten Kreisen gibt es im allgemeinen eine (reelle oder imaginäre) zu beiden senkrechte Kugel. Nun ist die Konformgeometrie mit einer absoluten Kugel gleichbedeutend mit einer nichteuklidischen Geometrie, deren Gerade die zur absoluten Kugel senkrechten Kreise sind. Also ist die Konformgeometrie der Kreisscharen bis zu Ableitungen erster Ordnung identisch mit der nichteuklidischen Geometrie der Regelflächen, und deren Begriffe lassen sich dann leicht auf die Konformgeometrie der Kreisscharen übertragen. Die Abhandlung enthält auf Grund ihres enzyklopädischen Charakters viele schon bekannte, daneben aber auch eine größere Zahl neuer Ergebnisse. Erwähnt seien die Sätze über die  $K$ -asymptotischen Linien einer Kreisfläche (Verallgemeinerung der Asymptotenlinien in der nichteuklidischen Geometrie der Regelflächen) und ferner die Verallgemeinerung der Bertrandkurven auf Paare von Kreisflächen.

Thomsen (Rostock).

**Donder, Th. de: Linéarisation d'un  $(ds)^2$  quelconque.** C. R. Acad. Sci., Paris 195, 1381—1383 (1932).

Das Linielement  $ds^2$  einer Riemannschen Mannigfaltigkeit kann als eine reine Summe von Differentialquadraten  $(du_i)^2$  geschrieben werden, wobei die  $du_i$  Pfaffsche Differentialformen der  $dx^i$  sind. Fernerhin kann eine quadratische Form

$$(X_1)^2 + (X_2)^2 + \dots + (X_n)^2 \quad (9)$$

mit Hilfe von hyperkomplexen Zahlen  $e^i$  in zwei lineare Faktoren zerlegt werden:

$$\left( \sum_{i=1}^{n-1} X_i e^i + X_n e^n \right) \left( - \sum_{j=1}^{n-1} X_j e^j + X_n e^n \right) \quad (9')$$

mit den Rechenregeln:

$$\left. \begin{aligned} e^i e^j + e^j e^i &= -2\delta^{ij}, \\ e^i e^n &= e^n e^i, \\ (e^n)^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (i, j = 1, \dots, n-1) \quad (9'')$$

Lanczos (Lafayette).

**Borůvka, O.: Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à  $n$  dimensions à courbure constante. I.** Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Nr 165, 1—22 (1932).

In einem  $n$ -dimensionalen Raume  $S_n$  mit konstanter Krümmung sei eine Fläche  $V_2$  gegeben. Mit  $R_{sk}$  sei der  $k$ -te Oskulationsraum von  $V_2$  (nach Bompiani) in einem allgemeinen Punkte  $P$  von  $V_2$  bezeichnet. [Siehe auch Bortolotti, E.: Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 104—108 (1931) und Rend. Semin. mat. Univ. Padova 2, 1—48, 164 bis 206 (1931) und dazu dies. Zbl. 1, 168; 3, 322.] Es ist bekanntlich  $s_1 < s_2 < \dots < s_N = n$ ,



so daß alle  $R_{N'}$  für  $N' \geq N$  schon  $n$ -dimensional sind. Der total orthogonale Raum zu  $R_{s_k}$  im  $R_{s_{k+1}}$  sei mit  $R_{r_k}$  bezeichnet, so daß  $r_k = s_{k+1} - s_k$ . Sind  $a_1, a_2, \dots$  die Krümmungen einer allgemeinen Kurve in  $S_n$ , welche in  $V_2$  liegt und durch den Punkt  $P$  hindurchgeht, und  $i^v_k$  ihr  $k$ -ter Einheitsnormalvektor, so bilden die Endpunkte der Projektion von  $a_1 a_2 \dots a_k i^v_k$  auf  $R_{r_k}$  (für alle Kurven auf  $V_2$  durch  $P$ ) eine geschlossene rationale Kurve  $C_k$  ( $1 \leq k < N - 1$ ). Im zweiten Teil werden hauptsächlich solche  $V_2$  in  $S_n$  aufgesucht, für welche in dem Punkte  $P$  alle Kurven  $C_1, \dots, C_m$  (für  $2(m+1) \leq n$ ) sich auf Kreise mit dem Mittelpunkt  $P$  reduzieren. Hlavatý (Praha).

**Walker, A. G.: The second curvature of a sub-space.** Quart. J. Math., Oxford Ser. 3, 291—298 (1932).

This paper generalises the notion of torsion to a Riemannian manifold  $V_n$ , imbedded in a Riemannian manifold  $V_m$ ,  $n < m$ . If  $\mathbf{N}$  is the unit vector of mean curvature of the  $V_m$ , then a quantity  $T$  is defined by the formula  $T = -\mathbf{N} \cdot \nabla^2 \mathbf{N} - (\nabla \cdot \mathbf{N})^2$ , where the  $\nabla$  is the differential operator relative to  $V_m$  and  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ . If  $\mathbf{N}$  is the unit principal normal vector to a curve in ordinary space,  $T$  is the square of the torsion of the curve. — If the  $V_m$  is imbedded in a  $V_p$ ,  $m < p$ , we can define an asymptotic sub-space  $V_n$  in  $V_m$ , if the vector  $\mathbf{N}$  of  $V_n$  with respect to  $V_p$  is tangent to  $V_m$ . The well-known formula about the torsion of an asymptotic line on a surface can be generalized to this case. Other formulas deal with geodesic submanifolds and a system of  $\infty^{m-n}$  manifolds  $V_n$  in  $V_m$  such that one  $V_n$  passes through each point of  $V_m$ . — We might remark that the results of this paper can also be obtained from the equations of Frenet generalized to  $V_m$  in  $V_n$ . This has been done by Duschek-Mayer, Lehrbuch der Differentialgeometrie II, 201—232; and also by J. A. Schouten and E. R. van Kampen in Math. Ann. 105, 144—159 (1931); this Zbl. 2, 152. Struik (Cambridge).

**Finzi, B.: Tensori vettoriali e loro derivazione.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 404—410 (1932).

Ist in einem metrischen Raume  $V_N$  ein anderer  $V_n$  ( $N > n$ ) gegeben, so lassen sich bekanntlich [siehe z. B. Schouten — van Kampen, Math. Ann. 105, 144—159 (1931); dies. Zbl. 2, 152] die  $V_n$ -Bestimmungszahlen der  $V_n$ -Größen (welche in den  $V_N$ -Bestimmungszahlen gegeben sind) mittels der gemischten (= auf  $V_n$  und  $V_N$  bezogenen) Bestimmungszahlen des Einheitsaffinors berechnen, woraus auch gleich die Regel für die kovariante Ableitung in  $V_n$  der obenerwähnten  $V_n$ -Bestimmungszahlen folgt. Der Autor macht dies unter der Voraussetzung, daß  $V_N$  ein euklidischer Raum ist und führt Beispiele und neue Namen ein. Hlavatý (Praha).

**Biggiero, Giuseppina: Vedute geometriche sui tensori.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 478—484 (1932).

A tensor-field  $T_{i \dots k}$  of rank  $m$  in a 3-dimensional euclidean space  $S_3$  with rectangular cartesian coordinates has  $3^m$  components and so defines at any point  $Q$  a set of  $3^m$  numbers which may be regarded as the coordinates of a point  $P$  in an  $S_{3^m}$ . As  $Q$  varies through the whole of  $S_3$ ,  $P$  describes in  $S_{3^m}$  a space  $\Sigma$  depending on the nature of the tensor  $T_{i \dots k}$ . To a transformation of rectangular coordinates in  $S_3$  corresponds a projective transformation of  $\Sigma$  in  $S_{3^m}$ . The study of symmetric, skew-symmetric, isotropic and skew-isotropic tensors resolves itself into an investigation of the invariant or self-corresponding elements of the latter transformation. The author considers in particular the cases  $m = 1$  and  $m = 2$ . H. S. Ruse (Edinburgh).

## Topologie:

**Whyburn, Gordon T.: Characterizations of certain curves by continuous functions defined upon them.** Amer. J. Math. 55, 131—134 (1933).

Es wird bewiesen, daß unter den kompakten Kontinuen die Kurven, bzw. reguläre Kurven, bzw. rationale Kurven (Terminologie nach K. Menger, Kurventheorie, Leipzig: Teubner 1932) durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet sind: Es gibt

eine auf dem betreffenden Kontinuum  $K$  erklärte, reelle, stetige, auf keinem seiner Teilkontinuen konstante Funktion  $f$ , derart, daß diejenigen Werte von  $f$ , die  $f$  auf 0-dimensionalen, bzw. höchstens abzählbaren, bzw. endlichen Teilmengen von  $K$  annimmt, in der Wertmenge von  $f$  dicht liegen. Dabei kann im Falle der Charakterisierung von  $K$  als einer Kurve die letzte Bedingung weggelassen werden, da aus der Nichtkonstanz von  $f$  auf sämtlichen Teilkontinuen von  $K$  bereits die Nulldimensionalität der Urbilder sogar von allen Werten von  $f$  folgt. *B. Knaster (Warszawa).*

**Whyburn, Gordon T.: On the existence of totally imperfect and punctiform connected subsets in a given continuum.** Amer. J. Math. 55, 146—152 (1933).

Eine ausführliche und einige wichtige kurventheoretische Ergebnisse enthaltende Untersuchung über ungelöste Fragen, die mit dem Vorhandensein von total unperfekten zusammenhängenden Teilmengen in beliebigen, und von diskontinuierlichen zusammenhängenden Teilmengen in lokal zusammenhängenden (gleichgültig ob beschränkten oder unbeschränkten) Kontinuen verknüpft sind. Es wird u. a. folgendes bewiesen. Damit jeder Punkt  $x$  eines Kontinuums  $K$  auf einer total unperfekten zusammenhängenden Teilmenge  $T_x$  von  $K$  liege, ist es notwendig und hinreichend, daß die Menge  $L_K$  aller lokalen Trennpunkte von  $K$  höchstens abzählbar sei. Dann ist  $K$  stets von der Ordnung  $\geq 4$ . Ist  $K$  insbesondere lokal zusammenhängend (stetiges Strecken- oder Geradenbild), so liegt, die Abzählbarkeit von  $L_K$  vorausgesetzt, jeder Punkt  $x$  von  $K$  auf einer total unperfekten zusammenhängenden und überdies lokal zusammenhängenden Teilmenge  $T_x$  von  $K$  (die Tatsache war bis jetzt nur für den Spezialfall der Sierpińskischen Dreieckskurve bekannt). Damit jeder Punkt  $x$  eines lokal zusammenhängenden  $K$  auf einer diskontinuierlichen zusammenhängenden (dabei also nicht 0-dimensionalen) Teilmenge  $D_x$  von  $K$  liege, ist es notwendig und hinreichend, daß auch  $L_K$  diskontinuierlich sei. Dann muß  $K$  von der Ordnung  $\geq 3$  sein. Verf. gibt tatsächlich ein merkwürdiges Beispiel einer regulären Kurve von der Ordnung 3 mit bloß abzählbarer Menge von Verzweigungspunkten an, die eine diskontinuierliche zusammenhängende Teilmenge enthält (Lösung zweier früheren Probleme vom Verf.). Schließlich wird ein von K. Menger herrührendes Problem, zwar nur in bezug auf lokal zusammenhängende Kontinua, gelöst: unter diesen sind nämlich diejenigen, deren diskontinuierliche Teilmengen mit den 0-dimensionalen übereinstimmen, dadurch charakterisiert, daß keines ihrer zyklisch zusammenhängenden (im Sinne vom Verf.) Teilkontinuen  $K$  ein diskontinuierliches  $L_K$  besitzt. *B. Knaster (Warszawa).*

## Astronomie und Astrophysik.

● **Strömgren, Elis, und Bengt Strömgren: Lehrbuch der Astronomie.** Berlin: Julius Springer 1933. VIII, 555 S. u. 186 Abb. RM. 30.—.

Aus dem Vorwort: „Das vorliegende Werk soll ein Mittelding bilden: es soll den Lesern ein gewisses Maß konkreter astronomischer Kenntnisse beibringen, aber gleichzeitig überall wenigstens eine erste Einführung in die wissenschaftlichen Methoden geben . . . die Studierenden so weit führen, daß sie für das wissenschaftliche Fachstudium genügend vorbereitet sind; . . . ein Bindeglied zwischen Amateurastronomie und wissenschaftlicher Astronomie bilden.“

— Das Schwergewicht liegt auf dem Teil, der in der Art guter populärer Werke über die Dinge berichtet, unter Vermeidung mathematischer Formeln. Daneben finden sich einige Kapitel (Himmelsmechanik und Theorie der Sternatmosphären), die in größere Tiefen der Probleme und Methoden vordringen und sich der mathematischen Hilfsmittel bedienen, die einem Studenten mittleren Semesters zu Gebote stehen. *Hans Kienle (Göttingen).*

**Kober, Hermann: Über eine Sondereigenschaft der Planetenellipse und der Bahn eines Punktes unter der Wirkung einer Elastizitäts-Zentralkraft.** Mh. Math. Phys. 39, 51—70 (1932).

**Öpik, E.: Note on stellar perturbations of nearly parabolic orbits.** Proc. Amer. Acad. Arts Sci. 67, 169—183 (1932).

This paper deals with the question of statistical stability of cometary or meteoric orbits in the solar system as far as perturbation by passing star is concerned. The



results of the investigation are as follows. Stellar perturbations during the time elapsed since the origin of the solar systems (probably  $3 \cdot 10^9$  years) set a possible limit to the later, which can be estimated at  $10^6$  astron. units. From the data relating to the observed non-uniformity of the orbital inclinations it is inferred that the effective perihelion distance of observable comets is between 1500 and 2000 astron. units; for observable meteors it is about 1000 astr. units. At this perihelion distance the orbits of meteors are comparatively stable during  $3 \cdot 10^9$  years, the heating effect being sufficient for a stony meteorite to lose its helium content. For objects with an aphelion distance  $< 1000$  astr. units stellar perturbations could not change appreciably the original distribution of the orbital elements during  $3 \cdot 10^9$  years. On the other hand as their result the number of objects of a given aphelion distance of 2000 astr. units or greater must increase with increasing perihelion distance to a certain limit. *Gerasimovič.*

**Walters, M. H. H.: Variations in the eccentricity and semi-axis major of the orbit of a spectroscopic binary. II.** Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **93**, 28—33 (1932).

Erweiterung einer Untersuchung über den Einfluß eines Passanten auf die Elemente einer Doppelsternbahn (siehe dies. Zbl. **5**, 87) durch Einbeziehung solcher Passanten, deren Exzentrizitäten zwischen 1 und 5 liegen. Die Störungen der Exzentrizität und der großen Achse bleiben von derselben Größenordnung wie in dem früher behandelten Fall. Zu der ersten Abhandlung werden eine Anzahl Berichtigungen gegeben.

*A. Klose (Berlin).*

● **Handbuch der Astrophysik. Hrsg. v. G. Eberhard, A. Kohlschütter u. H. Ludendorff. Bd. 5, 2. Hälfte. Das Sternsystem. Tl. 1. Bearb. v. Heber D. Curtis, B. Lindblad, K. Lundmark u. H. Shapley.** Berlin: Julius Springer 1933. X, 582 S., 2 Taf. u. 118 Abb. RM. 96.—.

**Pilowski, K.: Zur Erweiterung des Oort'schen Ansatzes für die systematischen Bewegungen im Sternsystem.** Astron. Nachr. **247**, 329—344 (1933).

Das von Mineur bearbeitete Material von Radialgeschwindigkeiten [Bull. Astron. II, **6**, 355 (1930)] wird in den Momenten 1. Ordnung der Geschwindigkeitsverteilung (systematische Sternströmungen) untersucht in seiner Abhängigkeit vom Ort unter der Annahme, daß das Strömungsfeld zylindersymmetrisch sei um die durch das galaktische Zentrum gehende, auf der galaktischen Ebene senkrechte,  $z$ -Achse; daß ferner der Strömungsvektor eine gerade Funktion von  $z$  sei. Die formale Darstellung der Beobachtungen durch diese Annahmen ist gut. Eine dynamische Begründung wird nicht gegeben.

*Heckmann (Göttingen).*

**Ten Bruggencate, P.: Die Verteilungsfunktion der absoluten Leuchtkräfte in kugelförmigen Sternhaufen.** Z. Astrophys. **6**, 138—143 (1933).

Nach einem Hinweis darauf, daß direkte Beobachtungen über das Vorkommen von Zwergsternen in Kugelhaufen nicht vorliegen, wird ein Verfahren entwickelt, das theoretisch die Verteilung der Leuchtkräfte in Sternhaufen abzuleiten gestattet; vorausgesetzt wird die Kenntnis der Totalhelligkeit  $H$  des Haufens als Funktion der Helligkeit  $h$  der schwächsten zu  $H$  beitragenden Einzelsterne. Aus der entsprechenden Totalhelligkeit  $J(r, h)$  in Parallelstreifen verschiedenen Zentralabstandes  $r$  würde theoretisch auch das Dichtegesetz des Haufens für verschiedene Leuchtkräfte bestimmt werden können. Schließlich wird eine geometrische Verdeutlichung des Satzes gegeben, daß im Sternsystem die Verteilung  $\psi(i, r)$  der Leuchtkräfte  $i$  und der Dichte nur dann aus Sternzahlen  $B(h)$  und mittleren Parallaxen  $\bar{\pi}(h)$  eindeutig bestimmbar ist, wenn  $\psi(i, r) = \varphi(i) \cdot f(r)$ , d. h. die Leuchtkraftverteilung unabhängig vom Ort ist. *Wempe.*

**Kothari, D. S.: Applications of degenerate statistics to stellar matter.** Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **93**, 61—90 (1932).

The results for degenerate matter used here have been given by the author [Phil. Mag. **13**, 361 (1932); this Zbl. **3**, 422]. It is shown that the energy transfer in degenerate matter in stellar interiors is mainly by thermal conduction, and not by radiation. It is possible to define an "effective opacity" to take account of this. It is

proportional to  $T^2/\rho$ , where  $T$  = temperature,  $\rho$  = density, instead of  $1/T^2$ , the opacity law for radiation in a degenerate gas. II The results are applied to Milne's two-phase stellar models. Numerical values for the physical state of a model white dwarf are given in detail. The central temperature comes out to be about  $10^7$  deg. III It is shown that for relativistic and non-relativistic degenerate matter the gas pressure always exceeds the radiation pressure. IV It is shown that a degenerate gas has a greater viscosity than a classical gas at the same temperature, and this viscosity is large compared with radiative viscosity. V The electromagnetic relation between the opacity and conductivity of a conducting medium is shown to lead to a value of the opacity of the order of magnitude of that given by the quantum theory. The conductivity has been evaluated in the author's previous paper. In an appendix he compares the physical constants of stellar degenerate matter with those of a metal (silver) under ordinary conditions, and with those that would be calculated for a classical gas at the same density and temperature.

W. H. McCrea (London).

**Schoenberg, E., und B. Jung: Strahlungsdruck und Gravitation in der Umgebung der Fixsterne.** *Astron. Nachr.* **247**, 413—426 (1933).

Die Wirkung des Strahlungsdruckes der Sternstrahlung auf interstellare Staubteilchen wird nach der Theorie von Debye (für vollkommen reflektierende Kugeln) berechnet und mit der Gravitationswirkung der Sterne auf die Teilchen verglichen. Nur bei Zwergsternen tiefer Temperatur und bei weißen Zwergen überwiegt die Anziehung bei Partikeln, die so klein sind ( $d < 4 \cdot 10^{-6}$  cm), daß sie eine Rayleighsche Verfärbung des Sternlichtes bewirken; bei heißen Riesensternen werden sogar große Teilchen fortgetrieben, die keine selektive Absorption mehr bewirken können. Eine Untersuchung der Verhältnisse in der Sonnenumgebung bis 15 Parsec Entfernung erlaubt keinen sicheren Schluß, ob sich hier verfärbende Materie halten kann, da die Zahl der absolut schwächsten Sterne nicht genau bekannt ist. *Siedentopf* (Jena).

**Okunev, B.: The harmonic analysis of radial velocity curves of the cepheids.** *Russ. astron. J.* **9**, 211—215 u. engl. Zusammenfassung 216—217 (1932) [Russisch].

Harmonic analysis of radial velocity curves of 26 Cepheids up to third harmonic inclusive. The examination of results seems to show that the variables having periods between seven and nine days represent a distinct group. First harmonics in their  $R_v$  expansions are appreciably smaller than those for other Cepheids. *B. P. Gerasimovič.*

**Krat, W.: Über die Ableitung des Randverdunkelungsgesetzes der  $\beta$ -Lyrae-Sterne.** *Z. Astrophys.* **6**, 96—106 (1933).

Bei der Entwicklung der Methode hat der Verf. die Grundgleichung, die früher bei der Untersuchung der Helligkeitsverteilung auf den scheinbaren Scheiben der Algolsterne schon benutzt wurde, zugrunde gelegt. Im Falle der nicht außerordentlich großen Ellipsoidität der Komponenten ( $\epsilon < 0,5$ ) lassen sich die Isophoten auf den Sternscheiben als konzentrische Ellipsen darstellen. Nach dieser Methode werden für u Herculis die Randverdunkelungskoeffizienten für beide Komponenten des Systems abgeleitet.

Woolley (Cambridge).

**Ambarzumian, V. A.: The radiative equilibrium of a planetary nebula.** *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **93**, 50—61 (1932).

Es wird der Strahlungsfluß durch eine planetarische Nebelhülle betrachtet, die vollkommen aus Wasserstoff besteht. Der Nebel absorbiert die Strahlung des Zentralsterns auf der kurzwelligen Seite der Lymangrenze und transformiert sie in der Hauptsache in  $L_\alpha$ -Strahlung. Das Feld der kontinuierlichen ultravioletten Strahlung und der  $L_\alpha$ -Strahlung werden getrennt untersucht, wobei von der Milneschen Methode der Reduktion auf ein ebenes Problem Gebrauch gemacht wird. — Infolge der hohen Intensität der  $L_\alpha$ -Strahlung ist ein großer Teil der Atome im  $2P$ -Zustand, so daß der Nebel außer für  $L_\alpha$  auch für die ersten Glieder der Balmerie undurchsichtig ist. — In den äußeren Teilen des Nebels sollte der von der  $L_\alpha$ -Strahlung herrührende Strah-



lungsdruck die Anziehung durch den Zentralstern überwiegen, wenn nicht die gesamte optische Dicke des Nebels im Ultravioletten sehr klein ist. *Siedentopf* (Jena).

**Zanstra, H.: The expansion hypothesis for planetary nebulae.** Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **93**, 131—149 (1932).

Die in zahlreichen planetarischen Nebeln beobachtete Verdoppelung oder Verbreiterung der Spektrallinien wird gedeutet als durch eine Expansion der Nebelhülle (etwa nach einem Novaausbruch) hervorgerufen. Der Bewegungsvorgang in der Nebelhülle wird untersucht unter den Annahmen: 1. die gesamte ausgeschleuderte Materie besitzt nur eine gleiche Anfangsgeschwindigkeit, 2. es kommt ein ganzer Bereich von Anfangsgeschwindigkeiten vor. Die zweite Annahme führt zu den Folgerungen, daß die Häufigkeit der Nebelradialen  $r_n$  umgekehrt proportional zu  $r_n^{3/4}$  und die Häufigkeit der Expansionsgeschwindigkeiten  $v_e$  umgekehrt proportional zu  $v_e^{2/3}$  sein soll. Das Beobachtungsmaterial bestätigt nach Ansicht des Verf. qualitativ diese Folgerungen. Das betrachtete Modell eines planetarischen Nebels ist stark schematisiert; Strahlungsdruck, Gasdruck und Rückkehr der Materie von zu geringer Anfangsgeschwindigkeit werden vernachlässigt.

*R. Wildt* (Göttingen).

**Ganguli, A.: On the equilibrium between radiation and matter in the universe.** Philos. Mag., VII. s. **15**, 65—72 (1933).

Verschiedene Möglichkeiten zur Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen von Stern und Kassel werden betrachtet und einige allgemeine Folgerungen gezogen. Im relativistischen Grenzfall ist die Zahl der Atome im Gleichgewicht mit Strahlung  $n = \frac{8\pi k^3 T^3}{h^3 c^3}$ , also gleich der Zahl der Lichtquanten pro Volumeinheit bei der Temperatur  $T$ .

*Siedentopf* (Jena).

**Genard, Jean: Les spectres moléculaires en astrophysique.** Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. **17**, H. 2, 1—64 (1932).

**Parhomenko, P.: On the properties of radiation in the atmosphere of the sun.** Russ. astron. J. **9**, 135—138 u. engl. Zusammenfassung 139 (1932) [Russisch].

In her previous paper (Russ. Astron. J. **8**, 3—4) the authoress has considered certain curves satisfying the condition that the opacity coefficient remains constant along them. In this note the question is analyzed as to whether these curves actually represent gaseous layers. By comparing theoretical radiation in various  $\lambda$  with Planckian distribution the question is answered positively, thus indicating that the absorption coefficient does not depend upon  $\lambda$ . On the contrary in upper atmospheric layers of the Sun absorption coefficient seems to increase rapidly with decreasing  $\lambda$ .

*B. P. Gerasimovič* (Charkow).

**Minnaert, M., und A. J. M. Wanders: Zur Theorie der Sonnenflecke.** Z. Astrophys. **5**, 297—320 (1932).

In der Annahme, daß die Sonnenflecke als aufsteigende Gase aufzufassen sind, die expandieren und abkühlen, und unter Berücksichtigung der Durchsichtigkeit dieser Gase, haben Verf. die Strahlung berechnet, die aus dem Fleck heraustreten muß. Es ergibt sich, daß das Intensitätsverhältnis Fleck/Photosphäre viel langsamer mit der Wellenlänge wächst als die Beobachtungen zeigen; auch sollte dieses Verhältnis schnell nach dem Rande der Sonnenscheibe hin abnehmen müssen, was ebensowenig mit den experimentellen Daten verträglich ist. Es wird versucht, die adiabatische Theorie zu verfeinern. Dazu wurden einige Einflüsse geprüft. Diese Abänderungen zeigten jedoch entweder nur geringen Einfluß, oder sie führten zu noch erheblicheren Diskrepanzen zwischen Theorie und Beobachtung. Eine merkwürdige Übereinstimmung mit allen zur Verfügung stehenden Daten ergibt sich, wenn man statt konvektiven Gleichgewichts reines Strahlungsgleichgewicht in den optisch zugänglichen Teilen des Flecks annimmt. Es läßt sich hieraus sogleich eine effektive Temperatur von etwa  $4300^\circ$  für den Fleck ermitteln. Mit dieser Hypothese verträgt sich auch der sonst rätselhafte

Umstand, daß aufsteigende Strömungen in den zentralen Teilen der Umbra noch nie beobachtet wurden. *Woolley (Cambridge).*

**Lefevre, L. E.:** The theory of the oscillations of certain stellar models about their steady-state configurations. I. *Quart. J. Math., Oxford Ser. 3*, 299—317 (1932).

The object of this investigation of the small oscillations of stellar models is to examine the phase relationship of the variation of displacement and velocity (the problem of Cepheid pulsation), and to find a "period equation" for the oscillations. The equations of the equilibrium configuration of the standard stellar model are summarised. The equations for small motion about this state for the gaseous layers are derived from the hydrodynamical equation of motion, with the equation of energy-exchange and the equation of continuity. The most general harmonic oscillation satisfying these equations is sought. Four second order differential equations for the amplitude functions are obtained. These indicate that in the bulk of the star there is no phase difference between displacement and luminosity, but that in the outer fringe certain terms which become significant may allow such a change of phase. To evaluate this it would be necessary to integrate numerically through the transition layers. This is not attempted, but it is shown how the boundary condition that the oscillations should remain finite at the surface must limit the number of arbitrary constants in the general solution. Introducing suitable boundary conditions at the centre the remaining arbitrary constants can in principle be eliminated, thus establishing the existence of a "period equation". A reference is finally made to the recent work of Rosseland where the same problems are discussed. *W. H. McCrea (London).*

**Cowling, T. G.:** The electrical conductivity of an ionised gas in the presence of a magnetic field. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 93*, 90—98 (1932).

It is well known that the motion of an electron in the presence of a magnetic field is a spiral path, and that the effect of a magnetic field on an electric current in an ionised gas is to set up a current (the Hall current) in a direction perpendicular to both electric and magnetic fields. The author applies a method generalised from that of Chapman to consider these effects of a magnetic field on turbulent motion in the solar reversing layer. He concludes that small turbulent motions are rapidly damped, and that the dimensions of clouds of gas in motion in the solar reversing layer must be large compared with 1 km. *Woolley (Cambridge).*

## Quantentheorie.

**Zener, C.:** Some observations on the theory of interchange of vibrational and translational energy. *Proc. Cambridge Philos. Soc. 29*, 136—141 (1933).

Es wird gezeigt, daß dieselbe Perturbationsmethode gültig ist für ein schwach veränderliches gegenseitiges Potential zwischen dem freien Atom und dem Oszillator wie für ein unendlich steiles Potential, vorausgesetzt, daß die reduzierte Masse des Systems genügend klein ist. — Eine vereinfachte Methode zur Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten wird diskutiert. Diese Methode wird zur Berechnung der Wirkung von van der Waalschen Kohäsionskräften benutzt. *Waller (Upsala).*

**Viney, Irene E.:** Asymptotic expansions of the expressions for the partition function and the rotational specific heat of a rigid polyatomic molecule for high temperatures. *Proc. Cambridge Philos. Soc. 29*, 142—148 (1933).

The partition function for the rotational states of a molecule represented as a symmetrical top with principal moments  $A, A, C$  is

$$F(\theta) = F(\sigma, \bar{\sigma}) = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) e^{-\sigma j(j+1)} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^j (2j+1) e^{-\sigma j(j+1) - \bar{\sigma} n^2},$$

where  $\sigma = h^2/8\pi^2 A k T$ ,  $\bar{\sigma} = (h^2/8\pi^2 k T) (1/C - 1/A)$ , in the usual notation. The author finds for this the asymptotic representation



$$F(\sigma, \bar{\sigma}) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \left[ \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\sigma}{4} + \frac{\bar{\sigma}}{3} \right) + \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{\sigma^3}{32} + \frac{\sigma^2 \bar{\sigma}}{15} + \frac{\sigma \bar{\sigma}^2}{12} \right) + \frac{1}{\alpha^3} \left( \frac{\sigma^5}{384} + \frac{\sigma^4 \bar{\sigma}}{96} + \frac{\sigma^3 \bar{\sigma}^2}{60} + \frac{4 \sigma^2 \bar{\sigma}^3}{315} \right) \right] + O(\sigma^{5/2} \bar{\sigma}^{5/2}) + \dots,$$

where  $\alpha = \sigma + \bar{\sigma}$ , with a corresponding expression for the rotational specific heat  $C_{\text{rot}} = R(\log \theta)^2 (\theta \partial / \partial \theta)^2 \log F(\theta)$ . The method consists in the repeated application of the Euler-Maclaurin summation formula. The case of  $\bar{\sigma} = 0$  receives special treatment.

W. H. McCrea (London).

**Salant, E. O., and Jenny E. Rosenthal:** Theory of vibrational isotope effects in polyatomic molecules. *Physic. Rev.*, II. s. **42**, 812–822 (1932).

Es wird die Veränderung der Schwingungsfrequenzen der symmetrischen gewinkelten Moleküle  $XY_2$  und  $XY_3$  beim Ersetzen eines  $X$ - oder  $Y$ -Atoms durch ein Isotop berechnet. Dabei wird angenommen, daß der Unterschied der Isotopengewichte klein gegen die Atomgewichte ist. Neben expliziten Formeln für die einzelnen Frequenzverschiebungen, in denen die Konstanten des harmonischen Kraftansatzes vorkommen, werden die Summen der prozentuellen Frequenzänderungen von Schwingungen gleicher Symmetrie berechnet. Diese Summen sind von dem Kraftansatz unabhängig; die Summe für die Parallelschwingungen hängt nur von den Massen ab, die für die Senkrechtschwingungen außerdem noch vom Winkel  $YXY$ . Aus dem Isotopen-effekt kann folglich dieser Winkel bestimmt werden.

E. Teller. (Göttingen).

**Pauling, Linus:** The nature of the chemical bond. II. The one-electron bond and the three-electron bond. *J. Amer. Chem. Soc.* **53**, 3225–3237 (1931).

**Pauling, Linus:** The nature of the chemical bond. III. The transition from one extreme bond type to another. *J. Amer. Chem. Soc.* **54**, 988–1003 (1932).

**Pauling, Linus:** The nature of the chemical bond. IV. The energy of single bonds and the relative electronegativity of atoms. *J. Amer. Chem. Soc.* **54**, 3570–3582 (1932).

Im Anschluß an die chemische Erfahrung wird die Eingliederung der verschiedenen Typen der chemischen Bindung in die Quantentheorie des Molekelbaues qualitativ behandelt. Außer den Idealtypen (Elektronenpaar-Bindung, Ionenbindung usw.) werden die Übergangsfälle an Hand vieler Beispiele erörtert. Die Frage der Additivität der Bindungsenergien wird untersucht, eine Tabelle der Energien der einzelnen bekannten Bindungen gegeben und gezeigt, daß sich Abweichungen von der Additivität durch den teilweise polaren Charakter einer Verbindung verstehen lassen (vgl. dies. Zbl. **3**, 95).

F. Hund (Leipzig).

**Menzel, Donald H.:** A simple derivation of the dissociation formula. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **19**, 40–44 (1933).

The familiar formula for the ionisation of a gas is derived by applying the Boltzmann law to give the ratio of the number of free electrons in an element of phase space, to the number bound in the lowest quantum state. The system of weights given by the quantum theory is employed. By integrating over the whole available phase space, the usual result is obtained. The proper definition of the ionisation potential in a gas of finite density is discussed.

W. H. McCrea (London).

**Kenty, Carl:** On radiation diffusion and the rapidity of escape of resonance radiation from a gas. *Physic. Rev.*, II. s. **42**, 823–842 (1932).

In his treatment of the diffusion of quanta of resonance radiation through a gas the author takes more account than has previously been done of the fact that an atom must be moving in a suitable manner if it is to absorb a quantum of a given frequency. This is important when the Doppler effect in the chief cause of broadening of the resonance line, in which case it is not accurate to use an average absorption coefficient to calculate the diffusion. He finds it necessary to assume an expression for the fraction of quanta emitted by atoms in a given velocity range, and he takes, as extreme cases, the probability that any atom is in the excited state to be (a) independent of the velocity

of the atom, (b) proportional to the probability that it is moving so as to absorb in the core of the resonance line. He obtains expression for (I) the fraction of emitted quanta traversing a given distance before absorption (II) the diffusion coefficient (III) the mean square free path (IV) the mean free path. When the volume of gas tends to infinity, the expressions for (II), (III), (IV) do not converge, owing to the effect of the very long free paths which are possible in a proper analysis of the Doppler effect. Other causes of line-broadening further increase the importance of these long free paths. They allow a faster rate of escape of resonance radiation than that computed by previous theories, and lead to better agreement with observation. *McCrea.*

**Zemansky, M. W.:** Note on the equivalent absorption coefficient for diffused resonance radiation. *Physic. Rev.*, II. s. 42, 843—847 (1932).

The author points out that, when applied to a layer of gas of finite thickness, the work of Kenty (reviewed above) provides an equivalent absorption coefficient for the resonance line widened by the Doppler effect. He computes this, and compares the result with experiments of his own on the escape of resonance radiation from a layer of mercury vapour. He obtains agreement in the order of magnitude. *McCrea.*

**Kronig, R. de L.:** Zur Theorie der Supraleitfähigkeit. *Z. Physik* 78, 744—750 (1932).

**Kronig, R. de L.:** Zur Theorie der Supraleitfähigkeit. II. *Z. Physik* 80, 203 bis 216 (1933).

Zur Deutung der Supraleitung wird ein (gelegentlich schon früher vorgeschlagenes) Modell empfohlen, bei dem die Leitungselektronen unterhalb des Sprungpunktes eine Art Gitter bilden, von dem einzelne Fäden sich als Ganzes widerstandsfrei durch den Kristall hindurchbewegen können. Der Sprungpunkt entspräche dem Schmelzpunkt dieses Gitters. Gezeigt wird, daß eine lineare Kette (aber nicht ein dreidimensionales Gitter) von Elektronen mit gegenseitiger Wechselwirkung unter gewissen Bedingungen sich durch ein periodisches Kraftfeld (Ionengitter) hindurchbewegen kann, und ferner, daß die Matrixelemente der Störung infolge der Schwingungen des Ionengitters (die normalerweise für den Widerstand verantwortlich ist), hier verschwinden, solange man sich auf die Glieder beschränkt, die linear in den Verschiebungsamplituden sind. Weitergehende Ausführungen werden nicht gegeben, insbesondere wird auch die Frage nach der Stabilität eines solchen Elektronengitters nicht untersucht. *Nordheim* (Göttingen).

**Margenau, Henry:** Pressure broadening of spectral lines. II. *Physic. Rev.*, II. s. 43, 129—134 (1933).

Fortsetzung einer in dies. Zbl. 4, 383 referierten Untersuchung des Verf. Es wird eine näherungsweise gültige, geschlossene Form für die Linienverbreiterung in Fremdgasen sowie eine exakte Lösung angegeben, welche graphisch ausgewertet werden kann. Die bei der Hg-Linie 2537 Å gefundene Übereinstimmung mit den Experimenten ist genügend. Es wird darauf hingewiesen, daß aus der Linienverbreiterung auf die für die Molekularkräfte charakteristischen Konstanten geschlossen werden kann. *G. Beck.*

**Lenz, W.:** Allgemeine Theorie der Verbreiterung von Spektrallinien. *Z. Physik* 80, 423—447 (1933).

The classical theory of Lorentz widening of spectral lines requires extension (I) to take account of the difference between the optical and the gas-kinetic radius of the emitting atom, (II) to account for the displacement of the centre of the line, (III) to yield the Stark widening in an ionised gas, (IV) to account for unsymmetrical widening. These should all be given by a single theory which takes into account the perturbation of the frequency of the emitting atom by neighbouring atoms, allowing for its time variation due to the motions of the particles. The author attempts to supply such a theory, by extending that previously given by Weisskopf (*Z. Physik* 75, 287—301; this Zbl. 4, 188). He performs a Fourier analysis of the light emitted by the perturbed atom taking account of the distribution of the perturbing atoms in position and velocity. He carries out detailed calculations for the case of perturbing atoms different from the emitting atom. The evaluation of the integrals involves various



approximations, one of which is to assume a form  $-a \cdot r^{-p}$  for the frequency perturbation by an atom at distance  $r$ . The final expression for the line intensity is

$$J(\omega) = \frac{1 + \varepsilon(\omega_0 + \Delta\omega_0 - \omega)\tau_0}{(\omega_0 + \Delta\omega_0 - \omega)^2 + (\Delta\omega_h/2)^2},$$

where  $\omega/2\pi$  is the frequency,  $\omega_0/2\pi$  the frequency of the undisturbed line, and the other quantities are given in terms of certain integrals.  $\Delta\omega_h$  gives the half width, and  $\Delta\omega_0$  the frequency shift, and  $\varepsilon$  is a measure of the dissymmetry. Comparison with observed values of  $\Delta\omega_0/\Delta\omega_h$  makes possible a determination of the exponent  $p$ . The values found range from 5 to 11. Measurements do not exist to make possible a detailed verification of the expression for  $J(\omega)$ .

W. H. McCrea (London).

**Jensen, Hans:** Über einige für die Theorie der Druckverbreiterung von Spektrallinien wichtige Integrale. Z. Physik 80, 448—450 (1933).

Shows that certain integrals in the previous paper by W. Lenz can be evaluated in terms of  $\Gamma$  functions.

W. H. McCrea (London).

**Döpel, R.:** Über die energetische Wechselwirkung beim Korpuskularstoß. Ann. Physik, V. F. 16, 1—38 (1933).

Experimentaluntersuchung der Anregung von He, Hg, Na und K durch H-Kanalstrahlen; bei Helium unter quantitativem Vergleich mit der Anregung durch Elektronenstoß. Das Ergebnis ist, daß man die Anregung des gestoßenen Partners nicht wie bei Elektronen als Funktion der kinetischen Energie des stoßenden Teiles darstellen kann, solange dieser leichter anregbar ist als der getroffene. Maßgebend ist vielmehr eine „übertragbare Energie“, die in diesem Falle im wesentlichen die eines Elektrons von der Geschwindigkeit des stoßenden Teiles ist. D. h. die Anregung des He durch den H-Kanalstrahl erfolgt erst bei sehr viel größerer Röhrenspannung (über 2000 Volt) als bei Elektronen (23 Volt); entsprechend regen Na-Atome bis zu 500000 Volt atomaren Wasserstoff nicht an. Erst bei gleicher oder größerer Anregungsspannung des stoßenden Partners ist die „übertragbare Energie“ ein wesentlicher Teil seiner kinetischen; z. B. vermögen  $\text{Na}^+$ -Ionen von einigen 100 Volt bereits Edelgase zu ionisieren, und auch Stöße von H-Atomen gegen He verlaufen von mindestens 500 Volt ab anregend für H. Bei den Alkalimetallen, die als Kanalstrahl nicht zu erhalten sind, ist natürlich die Energie aus der Relativgeschwindigkeit berechnet.

W. Wessel (Coimbra).

**Terenin, A., und N. Prileshajewa:** Über den Wirkungsquerschnitt der Rekombination von Atomen unter Ausstrahlung. Physik. Z. Sowjetunion 2, 337—350 (1932).

Die Photodissoziation eines zweiatomigen Moleküls ( $AB$ ) in ein angeregtes Atom ( $A'$ ) und ein unangeregtes ( $B$ ) und die Rekombination unter Ausstrahlung bilden einen umkehrbaren Prozeß:  $h\nu + AB \rightleftharpoons A' + B$ .

Im Anschluß an Milne berechnen die Verff. für die Geschwindigkeitskonstanten statisch folgende Beziehung: ist  $k_v$  der molekulare Absorptionskoeffizient für den Zerfall und  $q_v$  der der Geschwindigkeit  $v$  (in der Verbindungslinie der Atome) entsprechende Wirkungsquerschnitt für die Rekombination, ferner  $s$  die Symmetriezahl des Moleküls,  $I$  sein Trägheitsmoment,  $\mu$  seine reduzierte Masse und  $g'$ ,  $g$  die statistischen Gewichte des angeregten und unangeregten Zustandes von Atom  $A$ , so gilt

$$\frac{q_v}{k_v} = \frac{8\pi^2 I}{\mu c^2 s} \frac{g}{g'} v^2 = \frac{8\pi^2}{s} \left( \frac{g r_0}{g' \lambda} \right)^2$$

( $r_0^2 = I/\mu$ ,  $\lambda = c/v$ ). An Hand der vorliegenden Daten für  $k_v$  berechnet man für die Halogene, die Halogenwasserstoffe und einige Metallsalze Werte für  $q_v$  zwischen  $10^{-20}$  und  $10^{-24} \text{ cm}^2$ . Da der gaskinetische Querschnitt etwa  $10^{-15} \text{ cm}^2$  ist, so bedeutet das, daß von  $10^5$  bis  $10^9$  der gaskinetischen Zusammenstöße von angeregten Atomen mit unangeregten nur einer zur Bildung eines Moleküls führt. Da verschiedene Arten der Wechselwirkung (Potentialkurven) möglich sind, erniedrigen sich diese Zahlen auf  $10^4$ — $10^8$ . Die Molekülbildung unter Ausstrahlung ist also ein sehr seltener Prozeß.

Wessel (Coimbra).

**Sextl, Theodor:** Bemerkung zur Streuung gleichartiger Teilchen. *Z. Physik* 80, 690—692 (1933).

Vorliegende Mitteilung ergibt die Verallgemeinerung eines Resultats von Mott [Proc. Roy. Soc. London A 126, 259 (1930)] und läßt sich in dem Theorem zusammenfassen: Untersucht man die Streuung von Teilchen, die nach dem Coulombschen Gesetz aufeinander wirken, für den Fall, daß die zusammenstoßenden Teilchen gleichartig sind und den Spin I besitzen, so sagt die Wellenmechanik aus, daß sich die nach der Newtonschen Mechanik zu erwartende Teilchenzahl mit dem Faktor

$$1 + \frac{2}{2I+1} \frac{\operatorname{tg}^2 \vartheta}{1 + \operatorname{tg}^4 \vartheta} \cos(\kappa \ln \operatorname{tg} \vartheta)$$

multipliziert, falls die Teilchen der Bosestatistik genügen; mit Faktor

$$1 - \frac{2}{2I+1} \frac{\operatorname{tg}^2 \vartheta}{1 + \operatorname{tg}^4 \vartheta} \cos(\kappa \ln \operatorname{tg} \vartheta),$$

falls die Teilchen der Fermistatistik genügen.

*Autoreferat.*

## Klassische Theorie der Elektrizität.

**Griffiths, Ezer:** Electrical and magnetic units. *Nature* 1932 II, 987—989.

**Gomes, Ruy Luís:** Elektrostatische Energie. *An. Fac. Ci. Porto* 17, 123—127 (1932) [Portugiesisch].

**Becker, Richard:** Unipolar-Induktion als Folge des relativistischen Zeitbegriffs. *Naturwiss.* 1932, 917—919.

Die elektromotorische Kraft  $E$  bei der Unipolarinduktion läßt sich bekanntlich nach dem Faradayschen Induktionsgesetz

$$E = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \quad (\Phi \text{ Induktionsfluß}) \quad (1)$$

berechnen. Verf. weist darauf hin, daß für eine anschauliche Begründung der Anwendbarkeit von (1) auf die Unipolar-Induktion wesentlich relativistische Betrachtungen notwendig sind. Verf. betrachtet als Beispiel einen unendlich-langen Magneten in gleichförmiger translatorischer Bewegung und gibt für das von ihm erzeugte elektrische Feld eine anschauliche Deutung, in welcher der relativistische Zeitbegriff eine Rolle spielt.

*V. Fock (Leningrad).*

**Hovgaard, William:** Ritz's electrodynamic theory. *J. Math. Physics*, Massachusetts Inst. Technol. 11, 218—254 (1932).

Diese Arbeit enthält eine Übersetzung größerer Abschnitte von Ritz' Arbeit: „Recherches critiques sur les théories électrodynamiques de Cl. Maxwell et H. A. Lorentz“, *Arch. Genève* 26 (1908). Eine Reihe von Bemerkungen des Verf., die allerdings die neuere Entwicklung von Quantenmechanik und Elektrodynamik nicht berücksichtigen, deuten an, daß es, fortschreitend auf dem hier von Ritz in großen Zügen gezeichneten Weg, möglich wäre, eine an die Stelle der Relativitätstheorie tretende Elektrodynamik zu schaffen, welche eine bessere physikalische „Erklärung“ experimenteller Tatsachen erreichen könnte. *M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

**Honda, Kotarô, Tamotu Nishina and Tokutarô Hironé:** A theory of the change of electric resistance in metals caused by hydrostatic pressure. *Sci. Rep. Tôhoku Univ.*, I. s. 21, 851—868 (1932).

**Kašpar, Emil:** Les ondes électromagnétiques le long des fils diélectriques. *Čas. mat. fys.* 62, Nr 2, 40—54 u. franz. Zusammenfassung 54 (1932) [Tschechisch].

**Zuhrt, Harry:** Die Beeinflussung elektromagnetischer Wellen durch Hochspannungsfreileitungen. (*Elektrotechn. Labor., Techn. Hochsch., Berlin.*) *Elektr. Nachr.-Techn.* 10, 25—38 (1933).

Es handelt sich um die Aufgabe, die Störung zu berechnen, welche eine an den Spitzen mittels Erdseils verbundene gerade Reihe von Hochspannungsmasten bei



ebenen eintreffenden elektrischen Wellen im Felde verursacht. Vorausgesetzt wird, daß die eintreffende Welle in Resonanz mit der berechneten Grundschiwingung der Mastenreihe ist. Durch Berechnung des Sekundärstrahlungsfeldes bei vorgegebenem Strom im Mastsystem und des gesamten Strahlungswiderstandes dieses Systems kann der erwähnte Strom infolge eines bekannten auftreffenden Feldes erhalten werden. Wenn nun mit diesem bekannten Strom das Sekundärfeld dem auftreffenden superponiert wird, erhält man die Größe der Störung. Die Rechnung wird mit den üblichen Vereinfachungen und Idealisierungen auch numerisch an einem Beispiel durchgeführt.

*M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

**Murray, F. H.:** The voltage induced in a transmission line by a lightning discharge. Amer. J. Math. 55, 119—125 (1933).

Es handelt sich um eine Übertragungsleitung bei einem unendlich gut leitenden Erdreich. Über der Übertragungsleitung befindet sich eine punktförmige Wolke, welche sich zur Erde entlädt. Die Gleichungen der Übertragungsleitung (die bekannte Saitendifferentialgl.) werden für die Verteilung der eingepprägten elektrischen Kraft, welche nach der Entladung entsteht, mittels der Riemannschen Methode gelöst, wonach Ausdrücke für Strom und Spannung auf der Leitung abgeleitet werden. *M. J. O. Strutt.*

**Model, S. J.:** Transmission curves of high-frequency networks. Proc. Inst. Radio Engr. 21, 114—143 (1933).

**Neufeld, Jacob:** Extension of the methods of Heaviside's calculus in calculation of circuits containing parameters varying with time. Philos. Mag., VII. s. 15, 170—177 (1933).

**Poritsky, Hillel:** The field due to two equally charged parallel conducting cylinders. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 11, 213—217 (1932).

Mit Hilfe konformer Abbildung wird obiges Problem unter Benutzung der  $\vartheta$ -Funktion gelöst. *M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

**Labus, J.:** Rechnerische Ermittlung der Impedanz von Antennen. Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. 41, 17—23 (1933).

Von einem geraden Draht sehr kleiner Dicke werden bei vorgegebener (sinusförmiger) Stromverteilung die elektromagnetischen Potentiale (skalares und Vektorpotential) berechnet. Die entstehenden Integrale sind elementar (mittels Integral-sinus, bzw. -cosinus) lösbar, für den Fall, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen entlang dem Draht gleich derjenigen im Raum ist. Aus den Potentialen wird die elektrische Feldstärke abgeleitet. Durch Anwendung des Poyntingschen Satzes auf der Drahtoberfläche wird in dieser Weise die gesamte Impedanz des Drahtstückes berechnet. Von früheren Arbeiten unterscheidet sich vorliegende im Wesen nur dadurch, daß die Gesamtdrahtlänge nicht auf eine ganze Zahl von halben Sinuswellen beschränkt, sondern beliebig ist, jedoch unter Einhaltung der wesentlichen obigen Einschränkung bezüglich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Das Rechnungsergebnis wird kurvenmäßig dargestellt. *M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

**Rousseau, M.:** Über die Theorie des freischwingenden Kreises. Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. 41, 27—28 (1933).

Ein aus Kapazität, Selbstinduktion und Widerstand in Reihenschaltung aufgebauter Schwingungskreis wird betrachtet, und den bekannten Gleichungen für Eigenfrequenz, Impedanz, Zeitkonstante werden Wortformulierungen gegeben, die ihnen eine „physikalische Deutung und eine für das Gedächtnis leichtere Form“ verleihen sollen. *M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

**Nowotny, W.:** Über Einschwingvorgänge bei Transformatorverstärkern. Arch. Elektrotechn. 27, 144—154 (1933).

Berechnung der Einschwingvorgänge transformatorgekoppelter Verstärker mit Benutzung der sog. Heaviside-Formel mit experimenteller Prüfung und Vergleich mit Widerstandsverstärkern. *Cauer (Göttingen).*



**Piesch, H.:** Filter für Zwischenfrequenzverstärker. Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. **41**, 23—26 (1933).

● **Kryloff, N., und N. Bogoliouboff:** Recherches sur la stabilité dynamique des machines synchrones. Charkow u. Kiew: Energieverlag 1932. 98 S. [Russisch].

**Buchholz, Herbert:** Die zweipolige Drehfeldmaschine mit flachem Läufer. Z. angew. Math. Mech. **12**, 321—342 (1932).

Magnetisches Feld, Energie und Drehmoment eines zweipoligen Synchronmotors ohne Gleichstromerregung mit flachem Läufer werden berechnet. Durch idealisierende Annahmen reduziert sich die Aufgabe auf die Bestimmung einer Potentialfunktion (magnetisches Potential), die auf einem Kreise vom Radius  $R$  um den Nullpunkt (Ständer) die Werte  $M \sin(\varphi - \varphi_0)$  ( $M, \varphi_0$  konstant,  $\varphi$  Polarwinkel) und auf der Strecke  $(-a, +a)$  (Läufer,  $a < R$ ) den Wert Null annimmt. Nach konformer Abbildung auf ein Kreisringgebiet wird die Lösung mittels des hierfür gültigen Poissonschen Integrals abgeleitet [Integralsatz von H. Villat, Rend. Circ. mat. Palermo **35**, 134 bis 175 (1912)]. Cauer (Göttingen).

**Kaden, H.:** Die Flußverdrängung in Eisenblechen in Wechselwirkung mit einem Luftspalt. Z. techn. Physik **14**, 69—73 (1933).

Es handelt sich um folgende Aufgabe der Elektrizitätstheorie. Ein in  $y$ - und  $z$ -Richtung unendlich ausgedehntes Blechpaket (Eisen), mit endlicher Dicke in der  $y$ -Richtung wird von einem geraden Luftspalt zerteilt. Im Eisen liegt ein elektromagnetisches Wechselfeld mit magnetischen Kraftlinien senkrecht zum Spalt vor (magnetische Flußverdrängung im Eisen). Wie setzt sich dieses Feld im Luftspalt fort? Im Eisen ist die Diffgl.  $\Delta H + \alpha^2 H = 0$  ( $H$  magnetische Feldstärke), im Luftspalt die Gl. (1):  $\Delta H = 0$  zu lösen, mit den bekannten Grenzbedingungen der elektromagnetischen Theorie an den Übergangsstellen. Es zeigt sich, daß der Einfluß des Luftfeldes nur sehr wenig in das Blechpaket hineingreift, so daß man für praktische Zwecke mit einer magnetischen Serienschaltung des Luftweges und des Eisenwiderstandes ohne Luftweg rechnen darf. Bemerkt sei, daß die Lösung nur näherungsweise richtig ist, da bei strenger Rechnung auch die Gl. (1) für  $|x| > d/2$  ( $d$  = Dicke des Blechpakets) gelöst werden müßte. M. J. O. Strutt (Eindhoven).

## Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

**Fischer, Johannes:** Zur Berechnung von Strahlungsempfängern. Ann. Physik, V. F. **15**, 861—880 (1932).

Im Gegensatz zu den bestehenden Arbeiten über diesen Gegenstand werden die Gleichungen des Strahlungsempfängers für sich aufgestellt und nicht verquickt mit Annahmen über das Anzeigergerät oder der verwendeten Schaltung. Für Bolometer, Thermoelemente und Thermoketten werden bei einigen vereinfachenden Annahmen lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Übertemperatur als Funktion des Ortes auf dem von der Strahlung getroffenen Stäbchen erhalten. Die Lösungen gestatten, Regeln für die günstigste Konstruktion von Strahlungsempfängern aufzustellen. M. J. O. Strutt (Eindhoven).

**Guggenheim, E. A., and N. K. Adam:** The thermodynamics of adsorption at the surface of solutions. Proc. Roy. Soc. London A **139**, 218—236 (1933).

In der Gibbsschen thermodynamischen Theorie der Oberflächenadsorption spielt eine konventionelle mathematische Grenzfläche eine Rolle, die mit der physikalischen Phasengrenzfläche im allgemeinen nicht zusammenfällt. Verff. untersuchen die Folgerungen, die sich ergeben, wenn diese mathematische Grenzfläche anders festgesetzt wird, als dies Gibbs getan hat. Sie werden dazu veranlaßt durch die Erkenntnis, daß die Gibbssche Festsetzung für die Anwendung physikalischer Theorien hinsichtlich der Grenzflächenstruktur wenig geeignet ist. — Es wird zunächst abgeleitet, daß  $\Gamma_i$ , der Oberflächenüberschuß des Stoffes  $i$  pro Quadratcentimeter Oberfläche, abhängig ist von der Lage der mathematischen Grenzfläche, daß aber die allgemeine Gibbssche Adsorptionsgleichung  $-d\gamma = \sum_i \Gamma_i d\mu_i$  ( $\gamma$  = Oberflächenspannung,



$\mu_i$  = Chemisches Potential des Stoffes  $i$ ) invariant bleibt. Unter Spezialisierung auf die Grenzfläche Flüssigkeit—Dampf werden nun der Methode von Gibbs, bei der die mathematische Grenzfläche so gewählt wird, daß für eine der Komponenten  $\Gamma' = 0$  wird, andere Möglichkeiten gegenübergestellt, die in bezug auf die Komponenten symmetrischer sind. Dabei wird der Überschuß  $\Gamma_i$  definiert durch Vergleich einer in der Oberfläche liegenden Portion mit einer Portion im Innern der Flüssigkeit, welche 1. genau die gleiche Gesamtmolenzahl, 2. genau die gleiche Masse, 3. genau das gleiche Volum wie jene besitzt. Nur im 3. Fall ist die mathematische Oberfläche mit der physikalischen identisch. — Es werden sodann die Beziehungen abgeleitet, die zwischen den auf Grund der genannten Festsetzungen erhaltenen  $\Gamma_i$  bestehen. In Zweikomponentensystemen fallen für sehr kleinen Gehalt an der Komponente 2 die  $\Gamma_2$ -Werte der 3 neuen Konventionen mit dem der Gibbsschen Konvention (mit Stoff 1 als Bezugssubstanz) zusammen. Bei mittleren und hohen Konzentrationen an 2 ergeben die 3 neuen Konventionen untereinander ähnlichen Verlauf der  $\Gamma_2$  als Funktion der Konzentration, während die Gibbssche Festsetzung in diesem Fall zu stark abweichenden Werten führt. Näheres hierüber im Original, wo das System Wasser-Äthylalkohol als Beispiel ausführlich behandelt wird. — Es wird schließlich die Möglichkeit untersucht, die inhomogene Oberflächenschicht als Film von nur einer Moleküldicke aufzufassen und demgemäß die mathematische Grenzfläche an die untere Grenze dieser unimolekularen Schicht zu legen. Dann liefert die Gibbssche Gleichung direkt die Konzentrationen in dem Grenzfilm. Das erhaltene Resultat ist befriedigend.

H. Ulich (Rostock).

Sugita, Motoyosi: Über die Thermodynamik der nicht reversiblen Erscheinungen.

I u. II. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 14, 579—591 u. 636—648 (1932).

Im 1. Teil der Arbeit versucht der Verf. eine allgemeine Thermodynamik der nicht reversiblen, stationären Vorgänge zu geben, die im 2. Teil auf die thermoelektrischen Erscheinungen angewandt wird. Für den thermoelektrischen Homogeneffekt wird dabei eine Formel erhalten, die mit einem von Eastman [J. Amer. Chem. Soc. 48, 1482 (1926), und 50, 284 (1928)] sowie C. Wagner [Ann. Physik 3, 627 (1929), und 6, 370 (1930)] gegebenen Ausdruck übereinstimmt, obwohl Verf. im Gegensatz zu diesen Forschern auch die Wärmeleitung berücksichtigt hat. Die Wiedemann-Franzsche Beziehung wird thermodynamisch abgeleitet. Zum Schluß wird besprochen, daß die Resultate der Sommerfeldschen statistischen Theorie mit den thermodynamischen Ableitungen nicht übereinstimmen.

H. Ulich (Rostock).

Lear jr., G. A. van: The Brownian motion of the resonance radiometer. Rev. sci. Instrum., N. s. 4, 21—27 (1933).

Shaw, A. Norman: The rapid derivation of thermodynamical relations. Trans. Roy. Soc. Canada, III. s. 26, 187—204 (1932).

## Geophysik.

Belluigi, A.: Sull'interpretazione dell'isanomale gravimetrie. Gerlands Beitr. Geophys. 3, Erg.-H., 230—235 (1933).

Der Autor beschreibt im folgenden die verschiedenen Methoden, welcher man sich bei der Interpretation der gravimetrischen Isanomalien bedient. Die Diskussion erstreckt sich auf die Grenzen der Gültigkeit. Es wird ferner diskutiert die Bedeutung der Isanomalien selbst. Schließlich gibt er eine allgemeinere Methode als die jetzt gebräuchlichen zur Berechnung der Tiefe aus den Ursachen der Isanomalien; eine Methode, die sich leicht anwenden läßt beim Gebrauch des Multiplikationsnetzes von Belluigi.

Autoreferat.

Fanslau, G.: Werte der Kugelfunktionen und deren Ableitungen für die wichtigsten erdmagnetischen Observatorien. Terrestr. Magnet. Atmosph. Electr. 37, 463—473 (1932).

Refsdal, Anfinn: Zur Thermodynamik der Atmosphäre. Norske Vid. Akad., Geofys. Publ. 9, Nr 12, 1—63 (1932).

In einem 1. Kapitel werden die energetischen Arbeiten von Margules weiterentwickelt. Ausgehend von der hydrodynamisch-thermodynamischen Grundgleichung:

$$\frac{dq}{dt} = c_v \frac{dT}{dt} + \frac{d(\frac{1}{2} v^2)}{dt} + a \frac{d\Phi}{dt} + a \operatorname{div}(pv) - a R \cdot v$$

werden die einzelnen Energieformen besonders behandelt: innere Energie, kinetische Energie, potentielle Energie



der Lage, nach außen abgegebene Arbeit und Arbeit der Reibungskraft. Anschließend wird die Theorie des Druck-Volumen-Diagrammes vervollständigt. Als Folge der täglichen Variation der Labilitätsenergie ergibt sich die tägliche Doppelwelle des Luftdruckes. Im letzten Teil werden in großen Zügen die atmosphärischen Zirkulationen aus den Gesetzen der Thermodynamik abgeleitet. Die Arbeit, die eine Weiterentwicklung einer früheren Hypothese (der feuchtlabile Niederschlag) darstellt, daß nämlich die Energiequelle der Schauer- und Zyklonentätigkeit vor allem in der Labilitätsenergie zu suchen sei, kann als theoretische Grundlage einer energetischen Wettervorhersage angesehen werden, die besonders für Langfristprognosen in Frage kommt.

*Fritz Hänsch (Aachen).*

**Hidaka, Koji:** Tidal oscillations in a rectangular basin of variable depth (II. paper). (Problems of water oscillations in various types of basins and canals. VI.). Geophys. Mag. 5, 265—271 (1932).

Verf. löst das Problem der freien Schwingungen in einem rechteckigen Becken mit den Seiten  $x = \pm a$ ,  $y = \pm b$  und der variablen Tiefe  $h = h_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right)$  unter Verwendung der hypergeometrischen Funktion  $F(\alpha, \gamma, z)$  nach Kummer. Zur Illustration werden die Teilschwingungen  $n = 1$ ,  $m = 0$  und  $n = m = 1$  berechnet und mit der Lambschen Lösung des analogen Problems bei konstanter Tiefe verglichen. (Lamb, Hydrodynamics, 5 th Ed, Art. 190.)

*K. Ledersteger (Wien).*

**Hidaka, Koji:** A practical method of integrating Chrystal's seiche-equation. Geophys. Mag. 5, 273—281 (1932).

Die Chrystal'sche Differentialgleichung wird mit einem Versuchswert für die Periode nach der Methode von Runge-Kutta numerisch von beiden Enden des Sees bis zur Knotenlinie fortschreitend integriert. Aus der Differenz der erhaltenen Lagen für die Knotenlinie wird die Verbesserung der Schwingungszeit ermittelt. Diese als „Knotenmethode“ bezeichnete sukzessive Approximation eignet sich vorwiegend für Einknotenschwingungen und wenn die horizontale Verschiebung des Wassers an den Enden nicht verschwindet.

*K. Ledersteger (Wien).*

**Hidaka, Koji:** Theory of uninodal longitudinal seiche in Lake Yamanaka. Geophys. Mag. 5, 283—291 (1932).

Verf. wendet seine „Knotenmethode“ (vgl. vorst. Ref.) auf eine Einknotenschwingung im See Yamamaka an. Der Versuchswert für die Periode wird durch direkte Integration der Chrystal'schen Differentialgleichung unter der Annahme, daß die Normalkurve eine Parabel ist, erhalten. Das Ergebnis stimmt innerhalb 1% mit der Beobachtung überein.

*K. Ledersteger (Wien).*

**Koenuma, K.:** On the surface waves of the sea. Geophys. Mag. 5, 245—263 (1932).

Das Problem der divergierenden Oberflächenwellen auf tiefem Wasser wird bei Berücksichtigung von innerer Reibung und Einfluß der Erdrotation aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen unter gewissen, vereinfachenden Annahmen, wie Polnähe, Symmetrie in allen Azimuten und Konstanz der ablenkenden Kraft der Erdrotation näherungsweise gelöst. Die Periode wird durch die Viskosität verlängert, ist aber in erster Annäherung unbeeinflußt von der Rotation. Die Bahn eines Teilchens ist eine Raumkurve, die sich als Schnitt zweier elliptischer Zylinder ergibt. Ihre Projektion auf den Horizont ist eine Ellipse, deren Hauptachse in der Richtung des Radiusvektors fällt. Ihre Dimension ist eine Funktion des Abstands vom Zentrum, während das Achsenverhältnis nur von der Wellenlänge abhängt. Die Projektoren der Bahnkurve auf die Vertikalebene durch den Radiusvektor ist ebenfalls eine Ellipse, jedoch mit geneigter Achse. Die Geschwindigkeit der Wellenbewegung hängt von der Distanz vom Zentrum ab und nähert sich für  $r = \infty$  einem endlichen Grenzwert. Die „Gruppengeschwindigkeit“ (bei Koexistenz mehrerer Wellen verschiedener Periode) erreicht für  $r = \infty$  nur die Hälfte dieses Grenzwertes.

*K. Ledersteger (Wien).*